5.1

A : $n \times n$ matrix

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

Hvis $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ hvor $\lambda \in \mathbb{R}$

så siger vi at $\vec{v}$ er egenvektor for A hørende til egenværdi λ

EKS på egenvektor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\vec{v}$$

$\vec{v}$ er egenvektor med egenværdi 2

Er $\lambda = 1$ en egenværdi ?

Løs ligning

$$A\vec{x} = 1\cdot\vec{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A - I_3)\vec{x} = \vec{0}$$

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 fri

$$x_1 - x_3 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektor med egenverdi 1

Løsningsmengden $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$
kaldes egenrummet hørende til egenværdi λ.
Det består af egenvektorerne og $\vec{0}$.

4.5 En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
kaldes en lineær operator på $\mathbb{R}^n$ hvis $m=n$

5.1 T: en lineær operator på $\mathbb{R}^n$
med standardmatrix A, A er $n \times n$

Hvis $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

så er $\vec{v}$ egenvektor for T med egenverdi λ

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

Egenvektor for T = Egenvektor for A.

<u>4.5</u> Eks. Standardmatrix

Hvis S er lineær operator på $\mathbb{R}^2$

og $S(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1$ og $S(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$

Så er standardmatrisen for S:

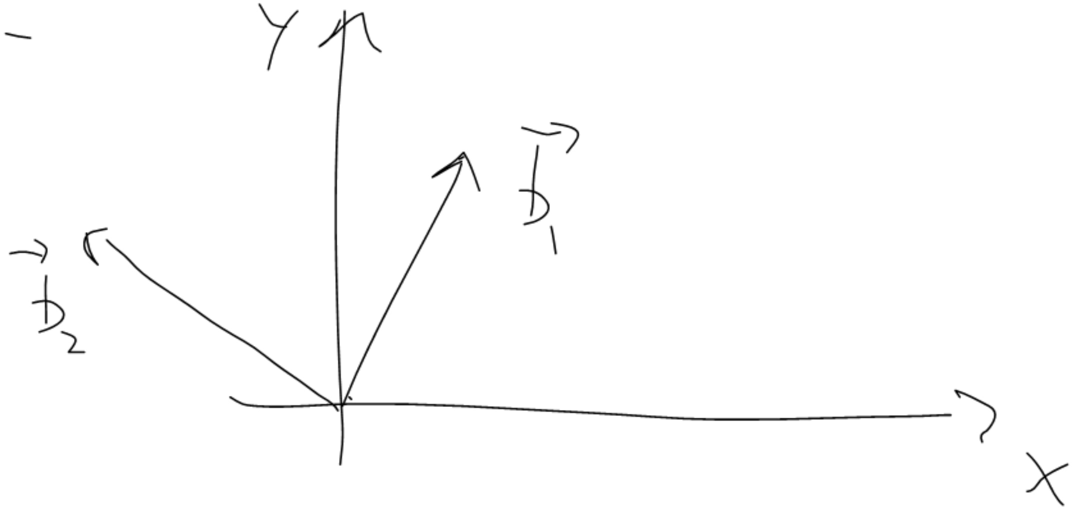
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Eks</u> nytt koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ er basis for $\mathbb{R}^2$

Nytt koordinat-system



T : en lineær operator på $\mathbb{R}^2$

som opfylder $T(\vec{b}_1) = 2\vec{b}_1$ og $T(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2$

Angiv matrix for T i nye koordinat-system.

<u>Definition</u>

Hvis T er en lineær operator på $\mathbb{R}^n$ og $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_n\}$ er basis for $\mathbb{R}^n$ så defineres matrix representation af T m.h.t. $\mathcal{B}$ som

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \; \cdots\cdots \; [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}} \right]$$

<u>Eks.</u> fortsat.

$$T(\vec{b}_1) = 2\vec{b}_1 = 2\vec{b}_1 + 0\cdot\vec{b}_2 \qquad [T(\vec{b}_1)] = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{b}_2) = 0\cdot\vec{b}_1 - \vec{b}_2 \qquad [T(\vec{b}_2)] = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Altså

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Setning 4.12

Hvis A er standardmatrix for lineær operator T og $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n\}$ $B = [\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n]$

Så er

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1} A B$$

og $$B [T]_{\mathcal{B}} B^{-1} = A$$

Bevis

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \; \dots \; [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}} \right] =$$

$$\left[\,[A\vec{b}_1]_{\mathcal{B}} \;\cdots\; [A\vec{b}_n]_{\mathcal{B}}\,\right] =$$

$$\left[B^{-1}A\vec{b}_1 \;\cdots\; B^{-1}A\vec{b}_n\right] =$$

$$B^{-1}A\left[\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n\right] = B^{-1}AB$$

<u>Eks.</u> fortsat

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Find standardmatrix

$$A = \underline{\underline{B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1}}}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

<u>Eks</u> T: lineær operator på $\mathbb{R}^3$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ basis for $\mathbb{R}^3$

Find matrix representation for T m.h.t. $\mathcal{B}$.

Standard matrix for T:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1} A B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>Setning</u>

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Hvis $\mathcal{B}$ er standard basis

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$