5.2

A : $n \times n$ matrix

λ : egenværdi for A

Egenrum for A hørende til egenværdi λ

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} = \text{Null } A - \lambda I_n \neq \{\vec{0}\}$$

B : $n \times n$ matrix

Hvis $\det B \neq 0$ så er B invertibel

$$B\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = B^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

Hvis $\det B = 0$ så er B ikke invertibel

B har en søjle uden pivot.

DVS: $B\vec{x} = \vec{0}$ har fri variabel, løsninger $\neq \vec{0}$

Hvis $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ så er λ ikke egenværdi

Hvis $\det(A - \lambda I_n) = 0$ så er λ egenværdi.

$\lambda = t$ er egenværdi

$\Updownarrow$

$\det(A - t I_n) = 0$ den karakteristiske ligning

Eks karakteristisk ligning

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 5-t & -6 \\ 3 & -4-t \end{bmatrix} = (5-t)(-4-t) - (-6)\cdot 3 =$$

$$-20 - 5t + 4t + t^2 + 18 = t^2 - t - 2$$

Karakteristisk ligning

$$t^2 - t - 2 = 0 \qquad at^2 + bt + c = 0$$

diskriminant: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Egenvardien: $2, -1$

$$t^2 - t - 2 = (t-2)(t-(-1)) = (t-2)(t+1)$$

For en 2×2 matrix A er

$\det(A - tI_2)$ på formen $t^2 + bt + c$

For en 3×3 matrix

$\det(A - tI_3)$ er på formen $-t^3 + bt^2 + ct + d$

$\det(A - tI_n)$ er et polynomium

Kaldes det karakteristiske polynomium.

Eks karakteristisk polynomium.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 3-t & -1 \\ 1 & 2-t \end{bmatrix} = (3-t)(2-t) - (-1)\cdot 1 =$$

$$6 - 3t - 2t + t^2 + 1 = t^2 - 5t + 7$$

$$D = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 7 = 25 - 28 = -3 < 0$$

Ingen egenverdier.

<u>Eks</u> karakteristiske ligning $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

udvikling efter 1. rekke

$$\det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} 2-t & -1 & 1 \\ 2 & 1-t & -2 \\ 2 & -1 & -t \end{bmatrix} =$$

$$(2-t)\det\begin{bmatrix} 1-t & -2 \\ -1 & -t \end{bmatrix} - (-1)\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -t \end{bmatrix} + 1 \cdot \det\begin{bmatrix} 2 & 1-t \\ 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$(2-t)\left((1-t)(-t)-(-2)(-1)\right)+\left(2(-t)-(-2)\cdot 2\right)+\left(2\cdot(-1)-(1-t)\cdot 2\right)=$$

$$(2-t)\left(-t+t^2-2\right)+\left(-2t+4\right)+\left(-2-2+2t\right)=$$

$$(2-t)\left(t^2-t-2\right)=-(t-2)(t-2)(t+1)=-(t-2)^2(t+1)$$

Egenværdier: 2 og −1

Egenrum for A hørende til egenværdi 2

$$A-2I_3=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 fri

$$x_1 - \frac{3}{2} x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{x_3}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrummet $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

<u>Eks</u> ~~Ikust~~ karakteristisk polynomium $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} 3-t & 1 & 2 \\ 0 & -t & -1 \\ 0 & 1 & -t \end{bmatrix}$$

1. søjle

$$= (3-t)\det\begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{bmatrix} = (3-t)\left(t^2+1\right) =$$

$$-(t-3)\left(t^2+1\right) = 0$$

t^2+1 har ingen rødder

Egenværdier: 3

Generelt $\qquad A: n \times n$ matrix

Hvis $\det(A - tI_n) = 0$ har forskellige løsninger $\lambda_1 \dots \lambda_k$

så er $\det(A - tI_n) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}\, g(t)$

hvor $g(t)$ er et polynomium uden rødder

F. eks. $g(t) = 1$ eller $g(t) = t^2+1$ eller, ---

m_i kaldes multipliciteten af egenværdien λ_i

Sætning 5.1

$1 \leq$ dimension af egenrum hørende til egenværdi λ

$\leq$ multiplicitet af λ

Eks multiplicitet

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 10 & -10 \\ 5 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det(A - tI_3) = -(t+12)(t-8)^2$$

Egenverdier:

-12 med multiplicitet 1

8 med multiplicitet 2

Egenrom hørende til egenverdi 8

$$A - 8I_3 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & -10 \\ 5 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2, x_3 frie $\quad x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrum: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

<u>Setning</u>

Hvis A og C er similære $\quad (C = P^{-1}AP)$

så er $\det(A - tI_n) = \det(C - tI_n)$

og A og C har de samme egenverdier.

Eks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - tI_4) =$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-t & 5 & 7 & -4 \\ 0 & 2-t & 9 & 7 \\ & 0 & 2-t & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} =$$

$$(1-t)(2-t)(2-t)(3-t) =$$

$$(t-1)(t-2)^2(t-3)$$

Egenverdi 1, 2, 3 , tallene på diagonal da A er triangulær.