1.2

Matrix-vektor-produkt

Hvis $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$

er en $m \times n$ matrix

og $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

så defineres

$$A\vec{v} = v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + \ldots + v_n\vec{a}_n$$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{v} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8 fremkommer som $2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 =$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A\vec{v}$'s indgang nr. i = $\left(A\text{'s række } i\right) \cdot \vec{v}$

Eks

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 + 4\cdot 1 + 1\cdot 3 + 3\cdot 4 \\ 5\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 0\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Eks

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

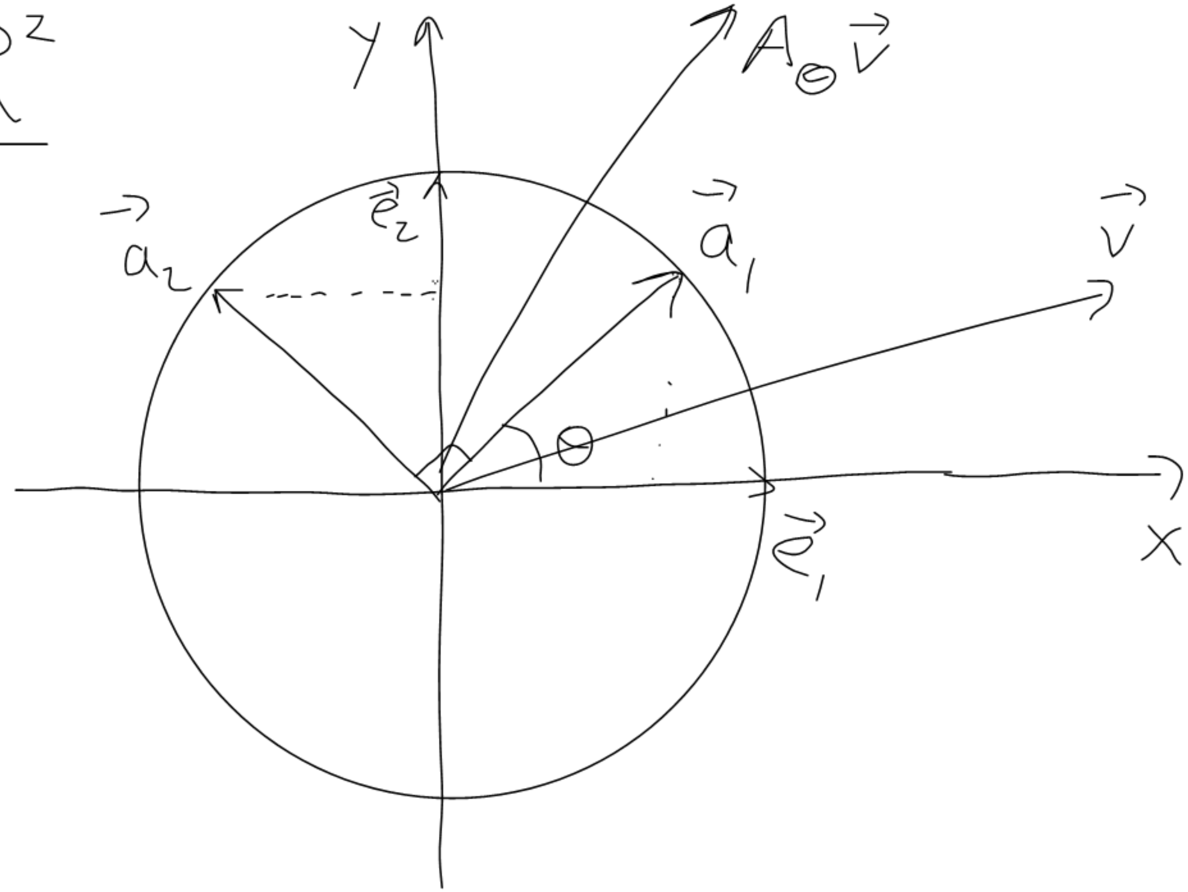
$$\underline{I_3 \vec{v}} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \vec{e}_i = 0 \cdot \vec{a}_1 + \quad \dots + 1 \cdot \vec{a}_i + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{a}_i$$

Rotation i $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$



$$A_\theta = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A_\theta \vec{v} = A_\theta (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = x A_\theta \vec{e}_1 + y A_\theta \vec{e}_2 = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2$$

$A_\theta \vec{v}$ er $\vec{v}$ roteret med vinkel θ.

1.3 Ligningssystemer

Liniens ligning i $\mathbb{R}^2$: $ax+by=c$

Planens ligning i $\mathbb{R}^3$: $ax+by+cz=d$

eller $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$

Lineær ligning $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$

$a_1 \dots a_n, b$ faste tal

$x_1 \dots x_n$ ubekendte

Et lineært ligningssystem består av m lineære ligninger.

<u>Eks</u>

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

ligning 3 − ligning 1 :

$$x_2 + x_3 = -1$$

ligning 2 − 2 ligning 1 :

$$-x_2 - 2x_3 = 1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ adder ligning 3 til ligning 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ adder ligning 2 til ligning 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ gang ligning 2 med -1

ombyt ligning 2 og ligning 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ ligning 1 − ligning 2 − ligning 3

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Samme ligningssystem på matrix form

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

koefficient matrix

Generelt lineært ligningssystem: $A\vec{x} = \vec{b}$

Udvidet koefficient matrix: $\left[A \;\; \vec{b} \right]$

I eksemplet: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right]$

Ligningssystem løst ved:

1. ombyt to ligninger
2. gang ligning nr. i med tal $c \neq 0$
3. adder c (ligning nr i) til ligning j

Elementære rækkeoperationer:

1. ombyt to rækker $\quad R_i \longleftrightarrow R_j$
2. gang række i med c: $\quad cR_i \to R_i$
3. adder c·(række i) til række j $\quad cR_i + R_j \longrightarrow R_j$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_3 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 - R_2 \to R_1]{-R_3 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$