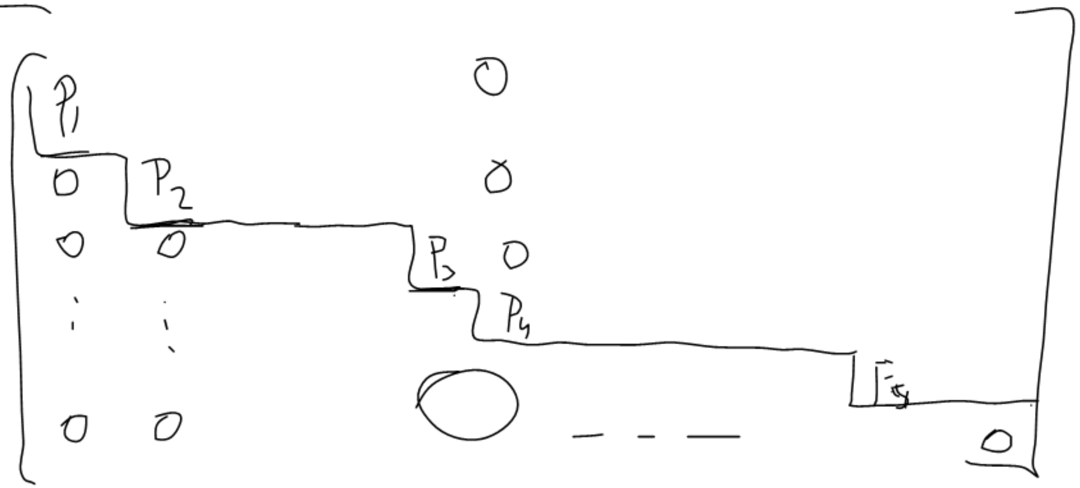
1.3



En matrix siges at være på trappeform hvis

1. 0-rækker står nederst
2. første tal $\neq 0$ i række nr. j (kaldes pivot-position, Fig: P_1 P_2 ...) er til højre for pivot i række nr. $j-1$

Matricen er på reduceret trappeform hvis også

3. alle pivot positioner = 1
4. alle tal over pivot er 0

Eks

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrix på reduceret trappeform

I en udvidet koefficient matrix på reduceret trappeform:

- pivot-position i sidste søjle $\Longleftrightarrow$ inkonsistent

- pivot i søjle nr j (ikke sidste søjle)
  $\Rightarrow x_j$ kan udtrykkes ved $x_{j+1} \cdots x_n$
- ikke pivot i søjle nr $j \Rightarrow$
  x_j fri variabel

1.4 Gauss elimination

omskriv matrix til trappeform

EKS

$$A = \begin{bmatrix} \underline{0} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & \underline{4} & 5 & 6 \\ 2 & -2 & 7 & \underline{8} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Betragt søjle 1

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se bort fra søjle 1 og række 1

Gentag for lille matrix

$$\xrightarrow{R_3 + R_2 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & -1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrix på trappeform

Fra trappeform til reduceret trappeform

$R_1 - 5R_3 \to R_1$
$R_2 - 2R_3 \to R_2$

$$\xrightarrow{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 4R_2 \to R_1}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ i reduceret trappeform

$\text{rank } A = 3$

$\text{nullity } A = 5 - 3 = 2$

<u>Definition</u> A: $m \times n$ matrix

Rangen af A (skrives $\operatorname{rank} A$)

= antal pivot-positioner

= antal søjler med pivot

Nulliteten af A

$\operatorname{nullity} A = n - \operatorname{rank} A$

= antal søjler uden pivot

Antal frie variable i $A\vec{x} = \vec{b}$

er $\operatorname{nullity} A$ (hvis konsistent)

__Eks__ A som før

Udvidet matrix for ligningssystem

$$[A \ \vec{0}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 og x_5 er fri variable

$$x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

$$x_2 = x_2$$

$$x_3 - x_5 = 0 \qquad\qquad x_3 = x_5$$

$$x_4 + 2x_5 = 0 \qquad\qquad x_4 = -2x_5$$

$$x_5 = x_5$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösningsmängden = mängden linear komb.

af $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.6

Definition

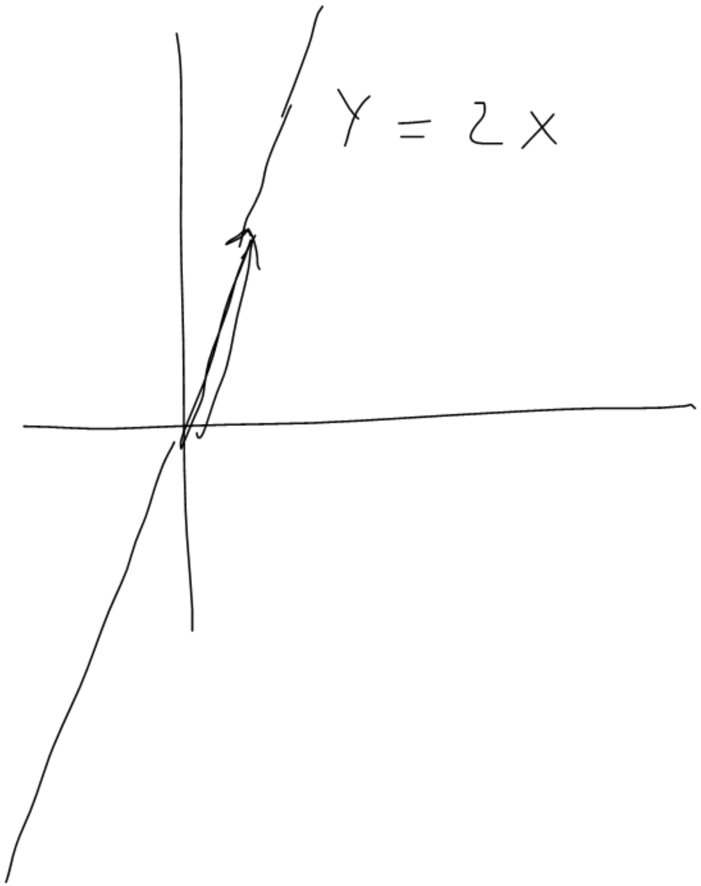
$S = \{ \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \ldots , \vec{u}_k \}$ mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$

Mængden (underrum) udspændt af S:

$$\operatorname{span} S = \left\{ c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k \;\middle|\; c_1, c_2 \dots c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Eks</u> i $\mathbb{R}^2$

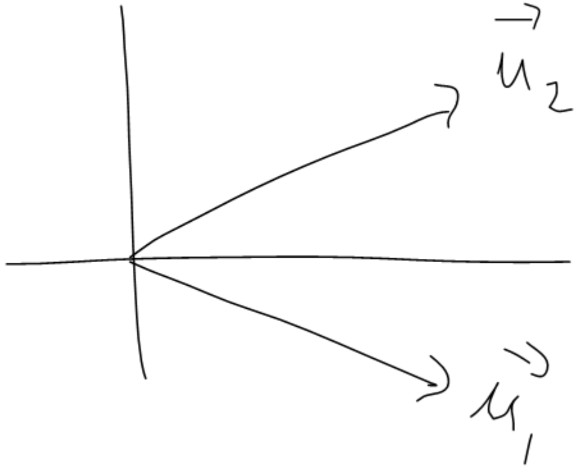
$$\operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$$



<u>Eks</u> i $\mathbb{R}^2$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ikke-parallelle vektorer i planen

$$\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \mathbb{R}^2$$



Eks i $\mathbb{R}^n$

$$\text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\} = \mathbb{R}^n$$

Eks

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Er $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ indeholdt i span S?

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Udvidet koefficient matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ligningssystem er konsistent.

JA, $\vec{v} \in \operatorname{Span} S$