1.6

Eks

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Er $\operatorname{span} S = \mathbb{R}^3$?

Er $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \operatorname{span} S$ for alle a, b, c

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Udvidet koeff. matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & a \\ 0 & \underline{-1} & 1 & b-a \\ 0 & 0 & \underline{2} & c+b-a \end{bmatrix}$$

pivot i søjler der svarer til S

Konsistent for alle a, b, c

$S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$

$A = [\vec{u}_1 \ \ldots \ \vec{u}_k]$ $\quad n \times k$ matrix

<u>Setning 1.6</u>

$$\operatorname{span} S = \mathbb{R}^n$$

$$\Updownarrow$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\Updownarrow$$

A har pivot i alle rekker

Hvis span $S = \mathbb{R}^n$ så er $k \geq n$

da

n = antal rækker = antal pivot $\leq$ antal søjler = k

Eks

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Linear kombination af S:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= (c_1 + 3c_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + (c_2 - c_3)\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

Altså $\quad \operatorname{span} S = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$

Løsning 1.7

$$\vec{v} \in \operatorname{span}\{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_k\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}\} = \operatorname{span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$$

Ønskes: $\{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_k\}$ hvor ingen $\vec{u}_i$ er linear kombinaction af de andre $k-1$ vektor.

<u>1.7</u> $S = \{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_k\}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$

<u>Definition</u>

Hvis ligningssystemet

$$x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

kun har løsning $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$

så siges S at være lineært uafhængig.

Hvis $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k = \vec{0}$

har løsning med mindst et c_i er $\neq 0$

så er S lineært afhængig.

Eks

$$S = \left\{ \underset{\vec{u}_1}{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}, \underset{\vec{u}_2}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}, \underset{\vec{u}_3}{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}} \right\}$$

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&1&0\end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&2&0\end{bmatrix}$$

Pivot i alle søjle undtagen den sidste.
Ingen fri variable.
Eneste løsning $x_1 = x_2 = x_3 = 0$
S er lineært uafhængig.

$$S = \{ \vec{u}_1, \ldots \vec{u}_k \}$$
$$A = [\vec{u}_1 \ \ldots \ \vec{u}_k] \qquad n \times k \text{ matrix}$$

Sætning 1.8

S er lineært uafhængig

$\Updownarrow$

$\Downarrow$

A har pivot i alle søjler.

Hvis S er lineært uafhængig så er $k \leq n$
da
k = antal søjler = antal pivot $\leq$ antal rækker = n

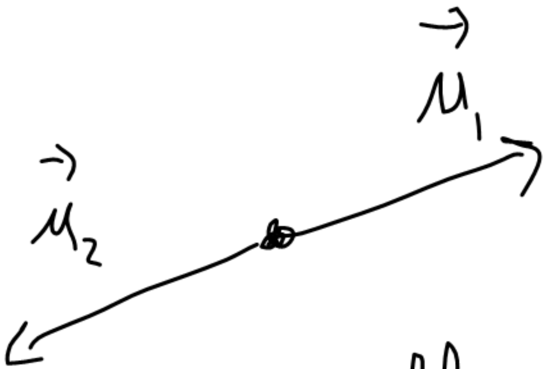
Eks

Hvis $\vec{u}_i = \vec{0}$ så er
$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2 \quad \vec{u}_i \; \dots \; \vec{u}_k\}$ lineært afhængig.

$\{\vec{u}_1\}$ hvor $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$

er lineært uafhængig.

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$



lineært afhængig

lineært uafhængig

Eks

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Er $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ lineært uafhængig

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ikke pivot i søjle 3.

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ er lineært afhængige.

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{er matrix}$$

for
$$x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 = \vec{u}_3$$

Løsning $\quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1$

$$\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4\}$ er lineært uavhengig

$$\text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\} = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4\}$$

Sætning 1.9

Hvis $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ er lineært afhængig

så er enten

- $\vec{u}_1 = \vec{0}$
- en af $\vec{u}_i$ $(i \geq 2)$ er linear kombination af $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}$

Et ligningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ sies å være homogent hvis $\vec{b} = \vec{0}$.

$\vec{x} = \vec{0}$ er alltid løsning til $A\vec{x} = \vec{0}$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Løs: $A\vec{x} = \vec{0}$

Udvidet koefficient matrix

$$[A \ \vec{0}] \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 og x_4 er frie variable

$$x_1 \quad + 2x_3 - x_4 = 0$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 + x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ er lineært uafhængige.