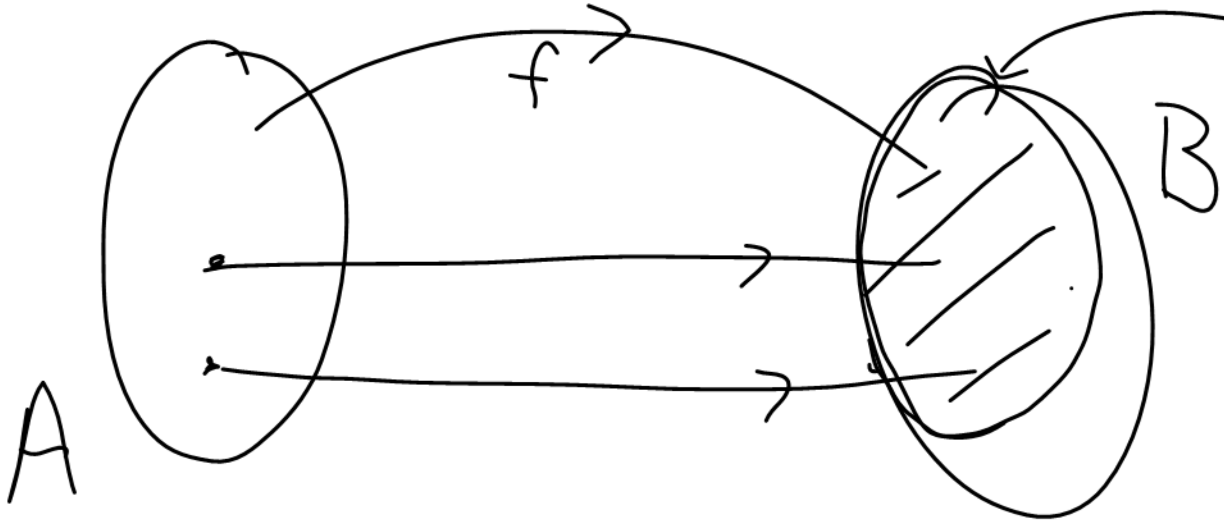
2.7 (App B)

$f : A \to B$ funktion $a \in A \Rightarrow$
$f(a) \in B$

f er enentydig / injektiv (1 – 1)
hvis
$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

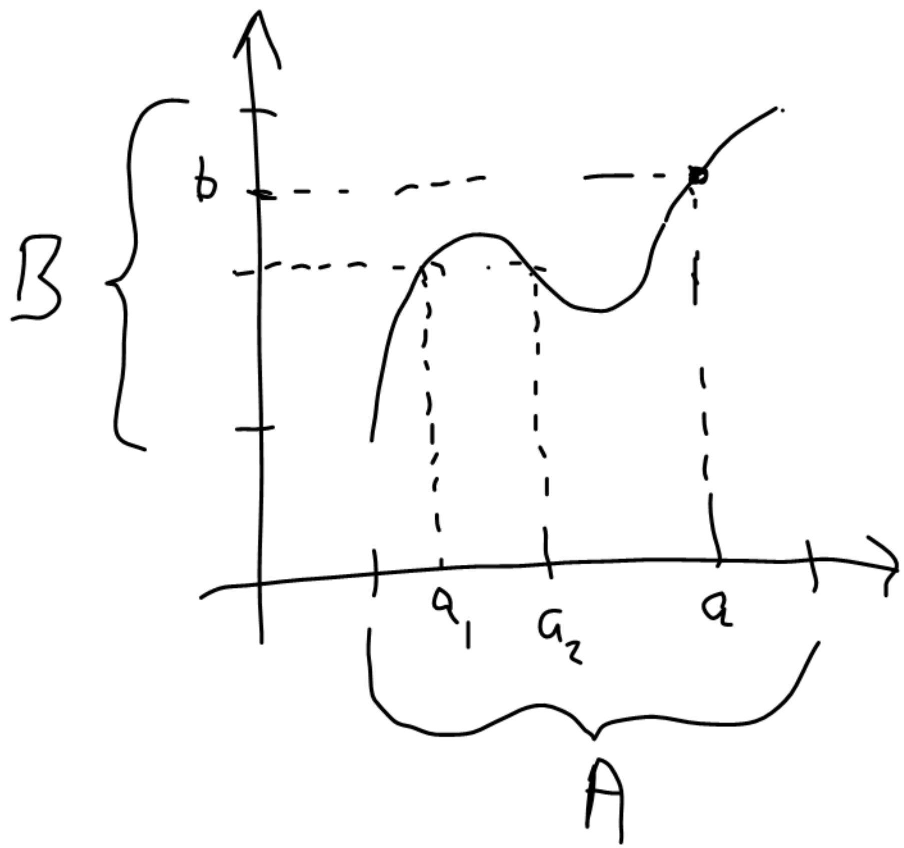


Billedmængde
$\{f(a) \mid a \in A\}$

f er på / surjektiv hvis der for ethvert $b \in B$ findes $a \in A$ så $f(a) = b$

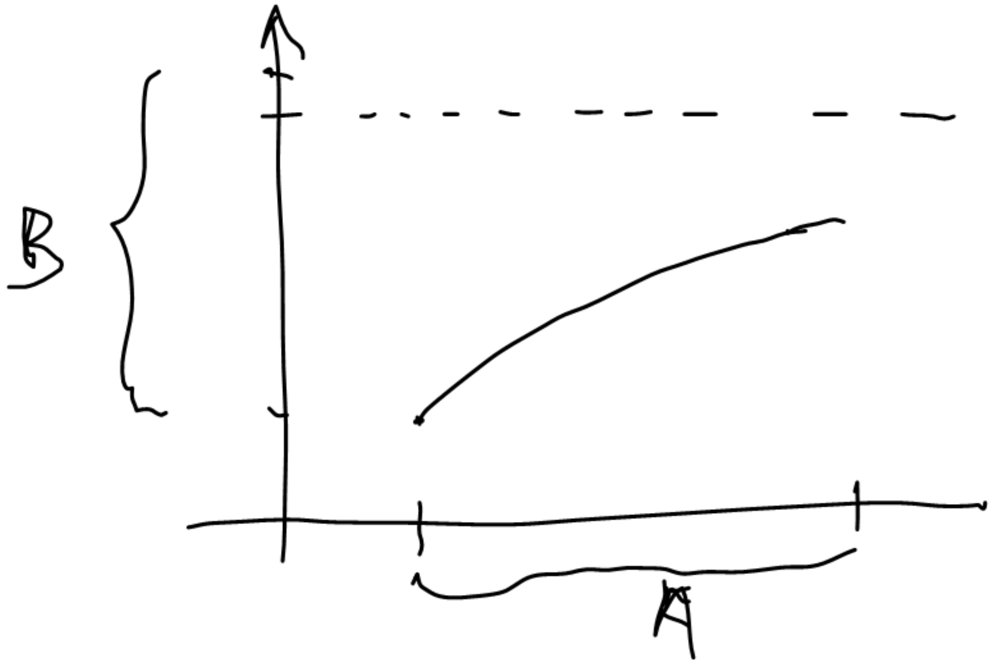
altså hvis billedmængden $= B$

Eks



på

ikke entydig



enentydig

ikke på

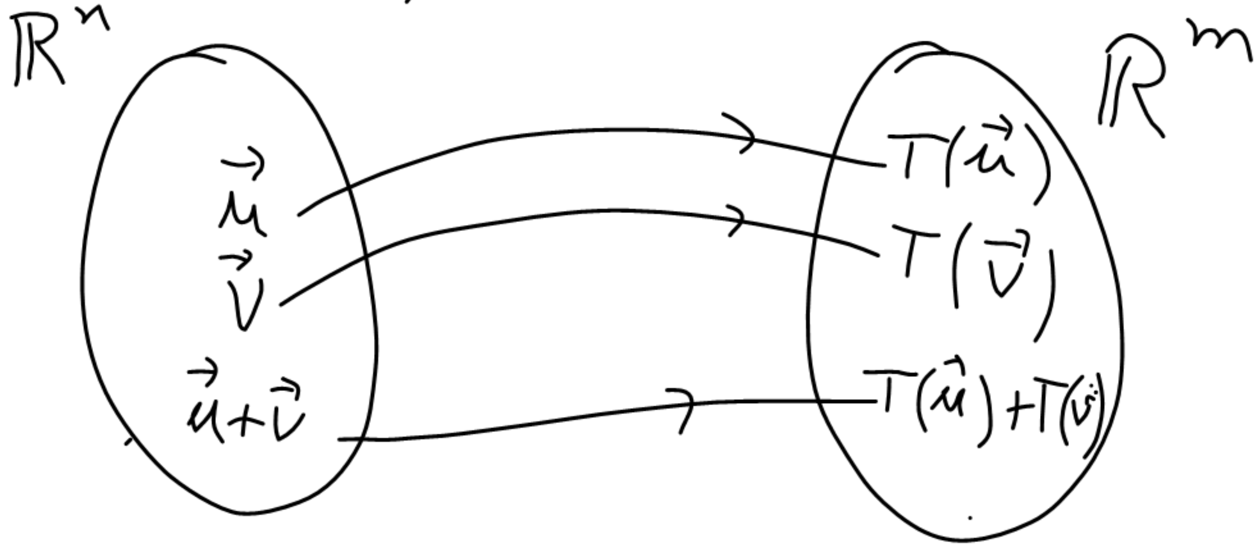
2.7

Definition

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en funktion der opfylder:

① $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

② $T(c\vec{v}) = cT(\vec{v})$



Eks

$$n = m = 2$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 5x_2 \end{bmatrix}$$

Påstand: T er lineær.

Eks

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} \neq$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$$

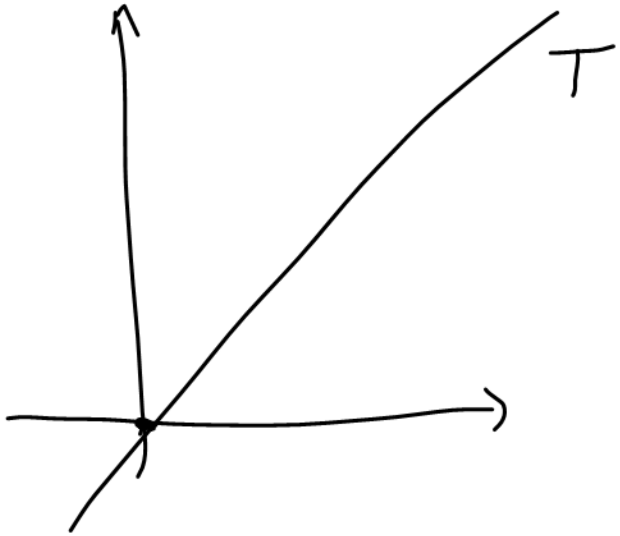
T er ikke linear.

<u>Eks</u> $\quad n = m = 1$

$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear transformation

Sæt $a = T(1)$

$$T(x) = T(x \cdot 1) = xT(1) = ax$$



Graf for T:
ret linie gennem $(0,0)$

Eks

Lad $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en lineær transformation

og antag $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ og $T\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

Find $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$T\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T\left((-1)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = 2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = T\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) =$$

$$x_1 T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + x_2 T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = x_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

Setning

Hvis $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er lineær

så er

1. $T(\vec{0}) = \vec{0}$

2. $T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v})$

Bevis for 1:

$$T(\vec{0}) = T(0 \cdot \vec{v}) = 0 \cdot T(\vec{v}) = \vec{0}$$

Definition

A : $m \times n$ matrix

Funktionen $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

som opfylder $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$

kaldes en matrix transformation.

Sætning 2.7

T_A er en lineær transformation.

① $T_A(\vec{u}+\vec{v}) = A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} =$

$T_A(\vec{u}) + T_A(\vec{v})$

② ...

<u>Sætning 2.9</u>

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineær transformation

Sæt $A = \left[T(\vec{e}_1) \;\; T(\vec{e}_2) \;\; \ldots \;\; T(\vec{e}_n) \right]$

Så er $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ for alle $\vec{v}$

Altså $T = T_A$

A kaldes standard matricen for T.

Eks

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Standard matrix for T:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear

Standard matrix $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \cdots \ \vec{a}_n]$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

Billedmængden af T

$$\{ T(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n \} = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$$

T er på

$\Updownarrow$

Billedmengden $= \mathbb{R}^m$

$\Updownarrow$

$$\operatorname{Span}\{\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$$

$\Updownarrow$

A har pivot i alle rækker.

T er entydig

$\Updownarrow$

A har pivot i alle søjler.