2.8

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear transformation
Standardmatrix B

$S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ linear
Standardmatrix A

Hvis $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ så er $T(\vec{v}) \in \mathbb{R}^m$
og $S(T(\vec{v})) = (S \circ T)(\vec{v}) \in \mathbb{R}^p$

$S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Er $S \circ T$ linear?

1. $(S \circ T)(\vec{u}+\vec{v}) = S(T(\vec{u}+\vec{v})) =$

$S(T(\vec{u}) + T(\vec{v})) =$

$S(T(\vec{u})) + S(T(\vec{v})) =$

$(S \circ T)(\vec{u}) + (S \circ T)(\vec{v})$

T linear

S linear

2. $(S \circ T)(c\vec{v}) = S(T(c\vec{v})) =$

$$S(cT(\vec{v})) = c\,S(T(\vec{v})) = c\cdot(S\circ T)(\vec{v})$$

$S \circ T$ er lineær

med standard matrix C

Beregn C fra A og B

2.1 (+2.8)

A $\quad p \times m$ matrix

$B = [\vec{b}_1 \; \vec{b}_2 \; \cdots \; \vec{b}_n]$ $\quad m \times n$ matrix

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{vektor i } \mathbb{R}^n$$

$$T(\vec{v}) = B\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \dots + v_n\vec{b}_n$$

$$S(T(\vec{v})) = A(B\vec{v}) = A(v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \dots + v_n\vec{b}_n) =$$

$$A(v_1\vec{b}_1) + A(v_2\vec{b}_2) + \dots + A(v_n\vec{b}_n) =$$

$$v_1 A\vec{b}_1 + v_2 A\vec{b}_2 + \dots + v_n A\vec{b}_n =$$

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Standard matrix for $S \circ T$.

Definition

Hvis $A : p \times m$

$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix} \quad m \times n$

så defineres

$$AB = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix}$$

$p \times n$ matrix

2.8: Standardmatrix for $S \circ T$ = (Standardmatrix for S) $\cdot$ (Standardmat for T)

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \\ 6 \cdot 1 + 8 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 46 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 4\cdot 7 \\ 6\cdot 3 + 8\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 74 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 34 \\ 46 & 74 \end{bmatrix}$$

Indgang (i,j) i AB = komponent nr i fra $A\vec{b}_j$

= (A's række i) $\cdot\, \vec{b}_j$ = (A's række i) $\cdot$ (B's søjle j)

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 6 & 1\cdot 4 + 3\cdot 8 \\ 5\cdot 2 + 7\cdot 6 & 5\cdot 4 + 7\cdot 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 28 \\ 52 & 76 \end{bmatrix}$$

Bemerk: $AB \neq BA$

<u>Eks</u>

A: 2×3 matrix

B: 3×4 matrix

AB: 2×4 matrix

BA ikke definert.

Eks

$A : 2 \times 3$

$B : 3 \times 2$

$AB : 2 \times 2$

$BA : 3 \times 3$

Funktion $\qquad S \circ T \neq T \circ S$

$$e^{\sin x} \neq \sin e^x$$

Linear transformation	Standard mat.
$U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	$C : m \times n$
$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$	$B : p \times m$
$S : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$	$A : q \times p$
$S \circ T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$	$AB \quad q \times m$
$T \circ U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$	$BC \quad p \times n$
$S \circ (T \circ U) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$	$A(BC) \quad q \times n$

$(S\circ T)\circ U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ $\quad (AB)C$

$$(S\circ(T\circ U))(\vec{v}) = S((T\circ U)(\vec{v})) =$$

$$\underline{S(T(U(\vec{v})))}$$

$$((S\circ T)\circ U)(\vec{v}) = (S\circ T)(U(\vec{v})) =$$

$$\underline{S(T(U(\vec{v})))}$$

Allbá $\quad (S\circ T)\circ U = S\circ(T\circ U)$

Og dermed $(AB)C = A(BC)$

associativ lov.

Hvis A er en $m \times n$ matrix

$$I_m A = A \quad \text{og} \quad A I_n = A$$

Hvis A er $m \times n$ og B er $n \times p$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Eks

Skift fra P_0 til P_1

98 % af BA fortsætter på BA

2 % af BA skifter til MP

3 % af MP skifter til BA

97 % af MP fortsætter på MP

$$\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} \text{antal BA på } P_0 \\ \text{MP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,98 & 0,03 \\ 0,02 & 0,97 \end{bmatrix}$$

På P_1

$$\vec{v}_1 = A\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 0,98 \cdot 80 + 0,03 \cdot 70 \\ 0,02 \cdot 80 + 0,97 \cdot 70 \end{bmatrix}$$

På P_2

$$\vec{v}_2 = A\vec{v}_1 = A(A\vec{v}_0) = AA\vec{v}_0 = A^2\vec{v}_0$$

På P_3

$$\vec{v}_3 = A^3\vec{v}_0$$

A : $m \times n$ matrix

vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$: en $n \times 1$ matrix

$A\vec{v}$

afsnit 1.2 afsnit 2.1

$$A \cdot (\text{vektor } \vec{v}) \overset{\cancel{?}}{=} A \cdot (\text{matrix } \vec{v})$$

$$A\left[\vec{v}\right] = \left[A\vec{v}\right] = A\vec{v}$$

$\vec{v}$ søjle vektor $\longrightarrow$ $A\vec{v}$ søjle

$$(A\vec{v})^T = \vec{v}^T A^T$$

række vektor $\vec{v}^T$ $\longrightarrow$ $\vec{v}^T A$ rækkevektor