2.8

$$f : A \to B$$

Hvis f er bijektiv (på og injektiv)
så findes for ethvert $b \in B$
et (f på) entydigt (f injektiv) $a \in A$
så $f(a) = b$
Skrives $a = f^{-1}(b)$

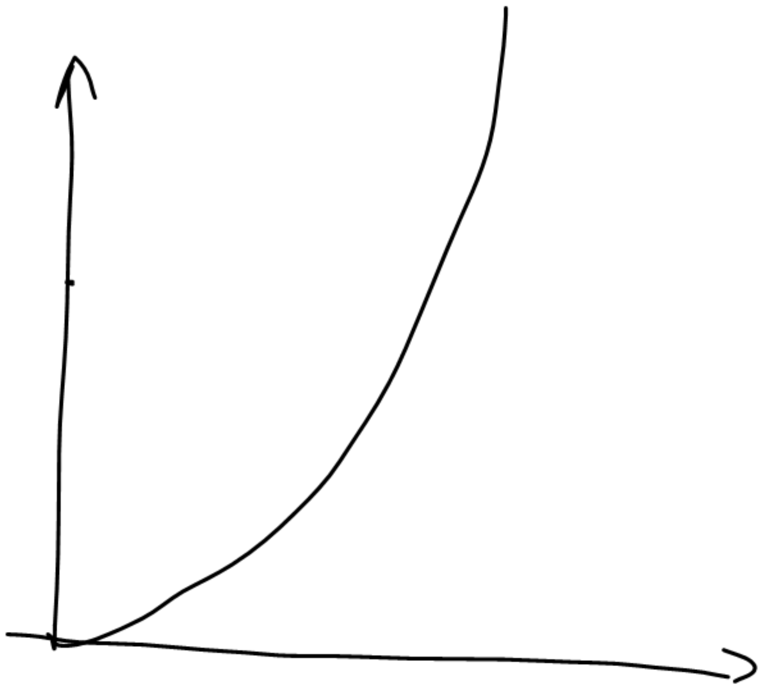
$f^{-1} : B \to A$ er invers til f

$$f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$$

$$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$$

<u>Eks</u> $\quad f : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$

givet ved $\quad f(x) = x^2$



f er bijektiv

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear transformation

Standardmatrix A

T er på hvis A har pivot i alle rækker

T er injektiv hvis A har pivot i alle søjler

Hvis T er bijektiv (forudsætter $m = n$) så findes invers T^{-1}, som er lineær.
T^{-1} har standardmatrix B.

Så er
$$\vec{v} = T^{-1}(T(\vec{v})) = T^{-1}(A\vec{v}) = BA\vec{v},$$
for alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Altså $BA = I_n$

$$\vec{v} = T(T^{-1}(\vec{v})) = AB\vec{v}, \quad \text{Altså } AB = I_n$$

2.3

Definition: Hvis A er $n \times n$ matrix som opfylder: der findes $n \times n$ matrix B så

$$AB = I_n \quad \text{og} \quad BA = I_n$$

Så er A invertibel med invers

$$A^{-1} = B.$$

Eks

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 2\cdot(-2) & 5\cdot(-2)+2\cdot 5 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) & 2\cdot(-2)+1\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= I_2$$

$$BA = I_2$$

A er altså invertibel og $A^{-1} = B$.

Definition

En elementar matrix E er en $n \times n$ der fås fra I_n ved anvendelse af én elementar rækkeoperation

$$I_n \to E$$

Eks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 4R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 4R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 9 - 4 \cdot 3 & 1 \cdot 8 - 4 \cdot 2 & 1 \cdot 7 - 4 \cdot 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

E fremkommet fra I_n ved rækkeoperation

EA —— A ved samme rækkeoperation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 4R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + 4R_3 \to R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ has inverse $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E$$

$$EE = I_3$$

$$E^{-1} = E$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enhver elementær matrix er invertibel.

A : matrix

Rækkeoperationer:

$$A \to E_1 A \to E_2 E_1 A \to E_3 E_2 E_1 A$$

$$\to \dots \to \underbrace{E_k \dots E_3 E_2 E_1}_{P} A = \mathrm{rref}(A)$$

$$\overbrace{\qquad\qquad}^{P} \quad \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{P^{-1}}$$

$$E_k \cdots E_3 E_2 E_1 E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \cdots E_k^{-1} =$$

$$E_k \cdots\cdots E_2 \, I_n \, E_2^{-1} \, E_3^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

$$E_k \cdots E_3 E_2 E_2^{-1} E_3^{-1} \cdots E_k^{-1} =$$

$$\cdots = I_n$$

<u>Sætning 2.3</u>

Der findes en invertibel matrix P

så $$PA = \text{ref}(A)$$

2.4

A : $n \times n$ matrix

Hvis $\mathrm{rref}(A) = I_n$

$$PA = I_n \quad , \; P \text{ invertibel}$$

$$\Downarrow$$

$$AP = IAP = P^{-1}PAP = P^{-1}I_nP = P^{-1}P = I_n$$

A er altså invertibel og $A^{-1} = P$

Hvis $\mathrm{rref}(A) \neq I_n$

så har A ikke pivot i alle søjler

DVS $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} x & & & & \\ & x & & & \\ & & x & & \\ & & & x & \\ & & & & x \end{bmatrix} = I_n$$

har en fri variabel

A ikke invertibel

(Hvis A invertibel $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

)

Sætning 2.5

$$A \text{ har invers}$$
$$\Updownarrow$$
$$\operatorname{rref}(A) = I_n$$

Algoritme der beregner A^{-1}

$$PA = I_n = \operatorname{rref}(A)$$
$$PI_n = P = A^{-1}$$

$$\mathrm{rref}\left(\begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} R & B \end{bmatrix}$$

Hvis $R = I_n$ så er $A^{-1} = B$

Hvis $R \neq I_n$ så A ikke invertibel

<u>Eks</u> $$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & I_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & A^{-1} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$