3.1

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Find invers A^{-1}

$$B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad ?$$

$$AB = \begin{bmatrix} ad-bc & a\cdot(-b)+ba \\ cd+d(-c) & c\cdot(-b)+da \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

Hvis $ad-bc=1$ så er $A^{-1}=B$

Hvis $ad-bc\neq 0$ så er $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}B$

$$A\cdot\frac{1}{ad-bc}B=\frac{1}{ad-bc}AB=I_2$$

Hvis $ad-bc=0$ så er A ikke invertibel

$ad-bc$ kaldes determinanten af A

A : $n \times n$ matrix

A_{ij} : $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fås fra A ved at slette række i og søjle j

<u>Definition</u> af determinanten af A skrevet $\det A$

$n=1$: $A = [a_{11}]$, $\det A = a_{11}$

$n \geq 2$: $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_{11} = [a_{22}] \;,\; A_{12} = [a_{21}]$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} \\ &= a_{11} \det [a_{22}] - a_{12} \det [a_{21}] \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_{11} = \begin{bmatrix} \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} \\ \cancel{1} & 0 & 2 \\ \cancel{0} & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_{13} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

$$= 5 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 6 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 7 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 5 \cdot (0 \cdot 4 - 2 \cdot 3) - 6 (1 \cdot 4 - 2 \cdot 0) + 7 \cdot (1 \cdot 3 - 0 \cdot 0)$$

$$= 5 \cdot (-6) - 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 = -30 - 24 + 21 = -33$$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \\ 7 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Nedre triangulær matrix: kun 0'er over diagonalen

$$\det A = 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \end{bmatrix} - 0 + 0 - 0$$

$$= 3 \cdot \left(4 \cdot \det \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - 0 + 0 \right) =$$

$3 \cdot 4 \cdot (-5) \cdot 6 =$ prod. af tal på diagonalen

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \huge 0 \\ & & \ddots & \\ \huge 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det I_n = 1$$

3.2 Sætning 3.4

A, B : $n \times n$ matricer

1. A invertibel $\iff \det A \neq 0$
2. $\det A^T = \det A$

3. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Hvis A er invertibel:

$$AA^{-1} = I_n$$

$$\det(AA^{-1}) = \det I_n$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

3.1

A : $n \times n$ matrix

Kofaktor

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Fortegn

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & & & \\ - & + & - & + & & & \\ + & - & + & - & & & \\ - & + & - & + & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

Så er

$$\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + \dots + a_{1n}c_{1n}$$

Kan også udregnes ved udvikling efter række i:

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \dots + a_{in}c_{in}$$

<u>Eks</u>

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Udvikling efter række 2:

$$\det A = -a_{21}\det A_{21} + a_{22}\det A_{22} - a_{23}\det A_{23}$$

$$-1 \cdot \det \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 0 - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -(6 \cdot 4 - 7 \cdot 3) - 2 \cdot (5 \cdot 3 - 6 \cdot 0) =$$

$$-3 - 2 \cdot 15 = -33$$

<u>Eks</u>

Øvre triangulær matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

udvikling efter sidste række:

$$\det A = -0 + 0 - 0 + 4 \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \dots = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

= produkt af tal på diagonalen.

3.2 Rækkeoperationer på determinanter

Hvis $A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} B$ så er $\det A = -\det B$

Hvis $A \xrightarrow{R_i + cR_j \to R_i} B$ så er $\det A = \det B$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2 - 5R_1 \to R_2}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$R_3 - 2R_2 \to R_3$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-11) = -33$$

3.1

Eks

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -18 & 11 \end{bmatrix}$$

For hvilke værdier af c

er $A - cI_2$ ikke invertibel.

$$\det(A - cI_2) = \det\begin{bmatrix} -10-c & 6 \\ -18 & 11-c \end{bmatrix}$$

$$= (-10-c)(11-c) - 6\cdot(-18) =$$

$$-110 + 10c - 11c + c^2 + 108 = c^2 - c - 2$$

$A - cI_2$ ikke invertibel

$$\Updownarrow$$

$$c^2 - c - 2 = 0 \qquad D = (-1)^2 - 4\cdot(-2) = 9$$

$$\Downarrow$$

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$