4.1

Definition

En delmængde W af $\mathbb{R}^n$ kaldes et underrum af $\mathbb{R}^n$ hvis

1. $\vec{0} \in W$
2. Hvis $\vec{u}, \vec{v} \in W$ så er $\vec{u} + \vec{v} \in W$
3. Hvis $\vec{u} \in W$ og $c \in \mathbb{R}$ så er $c\vec{u} \in W$

Eks

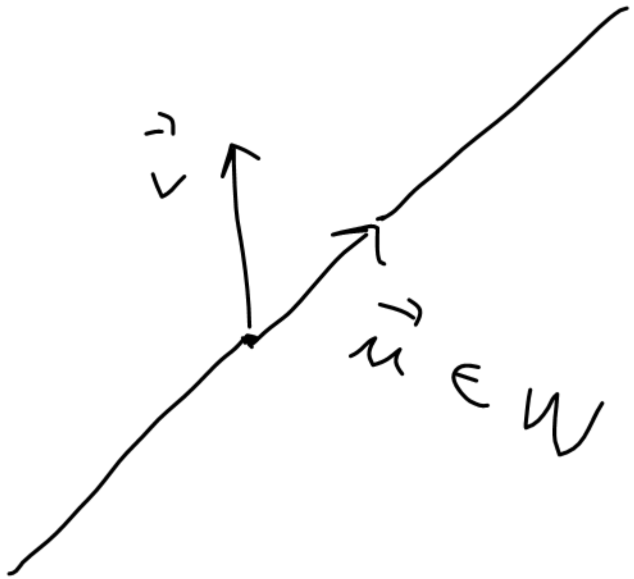
$W = \{\vec{0}\}$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$

Eks

Underrum af $\mathbb{R}^3$:

- $\{\vec{0}\}$
- en linie gennem $\vec{0}$
- en plan gennem $\vec{0}$
- $\mathbb{R}^3$



Sætning 4.1

Lad $S = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$

Så er span S et underrum af $\mathbb{R}^n$

Bevis

1. $\vec{0} = 0 \cdot \vec{w}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{w}_k \in \text{Span } S$

2. Lad $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være vektorer i Span S

$$\vec{u} = a_1 \vec{w}_1 + \dots + a_k \vec{w}_k$$

$$\vec{v} = b_1 \vec{w}_1 + \dots + b_k \vec{w}_k$$

Så er

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1)\vec{w}_1 + \ldots + (a_k + b_k)\vec{w}_k$$

indeholdt i span S

3 Lad $c \in \mathbb{R}$ og $\vec{u} \in \operatorname{span} S$

Så er $c\vec{u} = (ca_1)\vec{w}_1 + \ldots + (ca_k)\vec{w}_k$

indeholdt i span S

Definition

A : $m \times n$ matrix

Nulrummet af A :

$$\mathrm{Null}\, A = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \}$$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

x_3 , x_4 frie variable

$$x_1 \quad - x_3 - 2x_4 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 + 2x_4 \\ -2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Null } A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

et underrum af $\mathbb{R}^4$

Sætning 4.2

A : $m \times n$ matrix

Så er $\text{Null}\, A$ et underrum af $\mathbb{R}^n$

Definition

$$A = [\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \; \dots \; \vec{a}_n] \; : \; m \times n$$

Søjlerummet af A:

$$\text{Col}\, A = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$$

et underrum af $\mathbb{R}^m$

Eks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$$\text{Col } A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

da $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Col A er underrum af $\mathbb{R}^2$

$$\text{Col } A = \mathbb{R}^2$$

4.2

V : et underrum af $\mathbb{R}^n$

En mængde $\mathcal{B}$ af vektorer i V kaldes en basis for V hvis

1. $\operatorname{span} \mathcal{B} = V$
2. $\mathcal{B}$ er lineært uafhængig.

Eks

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$

Den kaldes standardbasen

Eks (Søjlerum)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Søjler uden pivot er linear kombination af søjler med pivot

Søjler med pivot er lineært uafhængig

Basis for Col A: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

<u>Generelt:</u>

A: $m \times n$ matrix

Søjler med pivot udgør en basis for Col A.

Sætning 4.3

V: et underrum af $\mathbb{R}^n$

Hvis $V = \operatorname{span} S$, $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$

så findes en delmængde af S som er basis for V.

Bevis

Sæt $A = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \ldots \ \vec{u}_k]$

Søjler med pivot udgør basis for $\operatorname{Col} A = \operatorname{span} S = V$.

Basis for $\mathbb{R}^n$

Lad $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$

være en basis for $\mathbb{R}^n$

Sæt $A = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \ldots \ \vec{v}_m]$

Da $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ har A pivot i alle rækker.

Da $\mathcal{B}$ er lineært uafhængig har A pivot i alle søjler.

n = Antal rækker = antal søjler = m

<u>Sætning 4.5</u>

V : et underrum af $\mathbb{R}^n$

Så har alle baser for V samme antal vektorer.

<u>Sætning 4.4</u>

V : et underrum af $\mathbb{R}^n$

S : lineær uafhængig mængde af vektor i V

Så kan S udvides til en basis for V.

Ethvert underrum $V \neq \{\vec{0}\}$ af $\mathbb{R}^n$ har en basis.

Vælg $\vec{v}_1 \in V$, $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

Hvis $\operatorname{span}\{\vec{v}_1\} = V$ så er $\{\vec{v}_1\}$ basis for V

Ellers vælg $\vec{v}_2 \in V$, $\vec{v}_2 \notin \operatorname{span}\{\vec{v}_1\}$

Hvis span $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = V$ så er

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ en basis for V

Ellers velg $\vec{v}_3$ .....

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ er lineært uavh.

Ellers er enten $\vec{v}_1 = \vec{0}$

eller $\vec{v}_i \in \operatorname{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}\}$ for et i