4.2

Sætning 4.5

V: et underrum af $\mathbb{R}^n$

Hvis $V \neq \{\vec{0}\}$ så har V en basis

(faktisk uendelig mange)

Så har alle baser for V

samme antal vektorer.

Definition Dette antal kaldes

dimensionen af V, skrives $\dim V$.

Desuden defineres $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Eks

$V = \mathbb{R}^n$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ er basis for $\mathbb{R}^n$

$\dim \mathbb{R}^n = n$

Eks Underrum af $\mathbb{R}^3$:

- $\dim\{\vec{0}\} = 0$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$
- Hvis V er en linie gennem $\vec{0}$, så er $\dim V = 1$

- Hvis V er en plan gennem $\vec{0}$, så er $\dim V = 2$.

Sætning 4.6 + 4.7

V: underrum af $\mathbb{R}^n$ med $\dim V = k$

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_\ell\}$ mængde af vektorer i V.

1. Hvis S er lineært uafhængig så $\ell \leq k$ (da S kan udvides

til en basis for V.)
Hvis også $l = k$ så er S en basis.

2. Hvis $\operatorname{span} S = V$ så er $l \geq k$
(da der findes delmængde af S som er basis)
Hvis også $l = k$ så er S en basis for V.

Eks

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

$$= \text{Null} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3 søjler uden pivot

3 frie variable

$\dim V = 3$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ 3 vektorer i V.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot i alle søjler, så B er lineært uafhængig.

Da $\dim V = 3$, så er B basis for V.

4.3

A : $m \times n$ matrix

Col A underrum af $\mathbb{R}^m$

Basis for Col A: Søjler i A med pivot.

$\dim \text{Col } A$ = antal søjler med pivot

= rank A

Null A underrum af $\mathbb{R}^n$

$\dim \text{Null } A$ = antal frie variable

$= \text{antal søjler uden pivot}$

$= n - \text{rank } A$

$= \text{nullitet af } A$

<u>Row A</u> rækkerum af

underrum af $\mathbb{R}^n$ udspændt af A's rækker

<u>Eks</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{Row } A = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \text{Col} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 3 & 7 & 11 \\ 4 & 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} = \text{Col } A^T$$

$$A \xrightarrow[\text{rækkeoperation}]{\text{elementær}} B$$

$$\text{Row } A = \text{Row } B$$

$$\text{Row } A = \text{Row rref}(A)$$

Rækker i $\text{rref}(A) \neq \vec{0}$ udgør en basis for Row A

$$\dim \operatorname{Row} A = \text{antal rækker med pivot}$$
$$= \operatorname{rank} A$$

$$\dim \operatorname{Row} A = \dim \operatorname{Col} A^T$$
$$= \operatorname{rank} A^T$$

$$\boxed{\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T}$$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Row } A = \text{Row rref}(A)$$

Basis for Row A: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Basis for Row A: rokker fra rref(A)

Basis for Col A: søjler fra A

Hvis vi ønsker basis-vektorer fra A.

$$\text{Row } A = \text{Col } A^T$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 3 & 7 & 11 \\ 4 & 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot i søjle 1 og 3

Basis for $\text{Row } A = \text{Col } A^T$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>4.2</u> $\quad V = \mathbb{R}^3$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$ lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^3$

Udvid S til en basis for $\mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sikrer at $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^3$

$$A \xrightarrow{\cancel{r}\text{ref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

pivot i søjle 1, 2, 4

Denne matrix er på trappeform hvilket er nok se pivotsøjler, men den ikke helt reduceret.

Basis for $\mathbb{R}^3$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$