5.1

A : $n \times n$ matrix

λ er en egenværdi hvis der findes vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ så

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$$

Eks

Er 5 en egenværdi for $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$?

$$A - 5I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ref}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En egenvektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ med egenværdi 5

opfylder $x_1 - 2x_2 = 0 \iff x_1 = 2x_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

F. eks $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektor med egenverdi 5.

<u>Definition</u>

Egenrummet for A hørende til egenverdi λ er

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} =$$

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}\} =$$

$$\text{Null } A - \lambda I_n \neq \{\vec{0}\}$$ hvis λ er egenverdi

Find en egenværdi λ

Fra tidligere

Hvis $\det B \neq 0$ så er B invertibel

og $B\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = B^{-1}\vec{0} = \vec{0}$

Hvis $\det B = 0$ så har B ikke pivot i alle søjler. $B\vec{x} = \vec{0}$ har frie variable og en løsning $\vec{x} \neq \vec{0}$

Anvend dette med $B = A - \lambda I_n$

Hvis $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ så er λ <u>ikke</u>

egenverdi.

Hvis $\det(A - \lambda I_n) = 0$ så

har $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$ en løsning $\vec{x} \neq \vec{0}$

og λ er egenverdi.

$\lambda = t$ er egenverdi

$\Updownarrow$

$\det(A - t I_n) = 0$

den karakteristiske ligning.

Eks $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Find egenværdier for A.

$$\det(A - tI_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \right) =$$

$$\det \begin{bmatrix} 5-t & -6 \\ 3 & -4-t \end{bmatrix} = (5-t)(-4-t) - 3\cdot(-6) =$$

$$t^2 - t - 2$$

Karakteristisk ligning $t^2 - t - 2 = 0$

$$at^2 + bt + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Egenverdier for A: 2 og -1.

Det betyder $t^2 - t - 2 = (t-2)(t-(-1)) =$

$$t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1)$$

For en 2×2 matrix A er

$$\det(A - tI_2) = t^2 + bt + c$$

For en 3×3 matrix A er

$\det(A - tI_3)$ på formen $-t^3 + bt^2 + ct + d$

Generelt: A: $m \times n$

$\det(A - tI_n)$ er et polynomium af grad n

det kaldes det karakteristiske polynomium

<u>Eks</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} 2-t & -1 & 1 \\ 2 & 1-t & -2 \\ 2 & -1 & -t \end{bmatrix} \overset{1.\ \text{række}}{=}$$

$$(2-t) \det \begin{bmatrix} 1-t & -2 \\ -1 & -t \end{bmatrix} - (-1) \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -t \end{bmatrix} +$$

$$1.\ \det\begin{bmatrix} 2 & 1-t \\ 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$(2-t)\Big((1-t)\cdot(-t)-2\Big) + \big(\underline{-2t}+4\big) + \big(-2-2(1\underline{-t})\big) =$$

$$(2-t)\big(t^2-t-2\big) + 0 = -(t-2)\big(t^2-t-2\big)$$

$$-(t-2)(t-2)(t+1) = -(t-2)^2(t+1)$$

Egenværdier 2 og -1

Find egenrum hørende til egenværdi 2:

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - \frac{3}{2}x_3 = 0$, $x_1 = \frac{3}{2}x_3$ $\quad x_3$ free

$x_2 - x_3 = 0$ $\quad x_2 = x_3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrummet hørende til egenværdi 2 : $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

<u>Eks</u>

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} 3-t & 1 & 2 \\ 0 & -t & -1 \\ 0 & 1 & -t \end{bmatrix} \overset{1.\ \text{søjle}}{=}$$

$$(3-t)\ \det\begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{bmatrix} - 0 + 0 =$$

$$(3-t)(t^2+1) = -(t-3)(t^2+1)$$

Karakteristisk ligning

$$-(t-3)(t^2+1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$t-3=0$ eller $t^2+1=0$

ingen løsning

Egenverdier: 3.

Generelt: $A: n \times n$

Hvis $\det(A - tI_n) = 0$ har løsninger

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (forskjellige)

så $\det(A - tI_n) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k} g(t)$

hvor $g(t)$ ikke har røtter

f. eks $g(t) = \pm 1$ eller $g(t) = t^2+1$ eller ....

m_i kaldes multipliciteten af λ_i

<u>Sætning 5.1</u>

$$1 \leq \dim \operatorname{Null} A - \lambda I_n$$
$$\leq \text{multipliciteten af } \lambda$$

<u>Eks</u>

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 10 & -10 \\ 5 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - t I_3) = -(t+12)(t-8)^2$$

Egenværdier

-12 med multiplicitet 1

8 med multiplicitet 2

Dimension af egenrum

$\lambda = -12$ dimension 1

$\lambda = 8$ $1 \leq$ dimension ≤ 2

$$A - 8I_3 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & -10 \\ 5 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

To søjler uden pivot

altså dimension af egenrum $= 2$