

Matricer, vektorer og regneoperationer

En $m \times n$ **matrix** A består af mn tal skrevet i m rækker og n søjler.

a_{ij} er tallet der står i række i , søjle j .

$i \in \{1, 2, \dots, m\}$ og $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

En $m \times 1$ matrix er en **(søjle-) vektor** med m komponenter.

Indgang i i vektoren \mathbf{v} betegnes ofte v_i .

Mængden af disse vektorer skrives \mathbb{R}^m .

En $1 \times n$ matrix er en **rækkevektor** med n komponenter.

Hvis A og B begge er $m \times n$ matricer så defineres **sum** af A og B ved:

$A + B$ er $m \times n$ matricen, hvor der i indgang (i, j) står $a_{ij} + b_{ij}$.

Hvis A er en $m \times n$ matrix og $c \in \mathbb{R}$ er en skalar (tal) så defineres **skalar multiplikation** ved:

cA er $m \times n$ matricen hvor der i indgang (i, j) står ca_{ij} .

Hvis A er en $m \times n$ matrix så defineres den **transponerede** matrix ved:

A^T er $n \times m$ matricen hvor der i indgang (i, j) står a_{ji} .

Identitetsmatricen (enhedsmatricen) I_n er $n \times n$ matricen med 1-taller på diagonalen og 0 udenfor diagonalen.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Søjlevektorerne i I_n betegnes e_1, e_2, \dots, e_n og kaldes **standard vektorer**.

Dette kan også skrives som $I_n = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$.

Hvis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ er (søjle-) vektorer og c_1, c_2, \dots, c_k er skalarer så siger vi at udtrykket

$$\underline{c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_k \mathbf{u}_k}$$

er en **linear kombination** af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$.

i \mathbb{R}^3 : $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ som linear kombination
af $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \vec{e}_1 + 4 \vec{e}_2 + 2 \vec{e}_3$$

Ehs

$$\vec{E} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

linear combination of $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = -1 \\ 2y = 4 \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ x=1, y=2$$

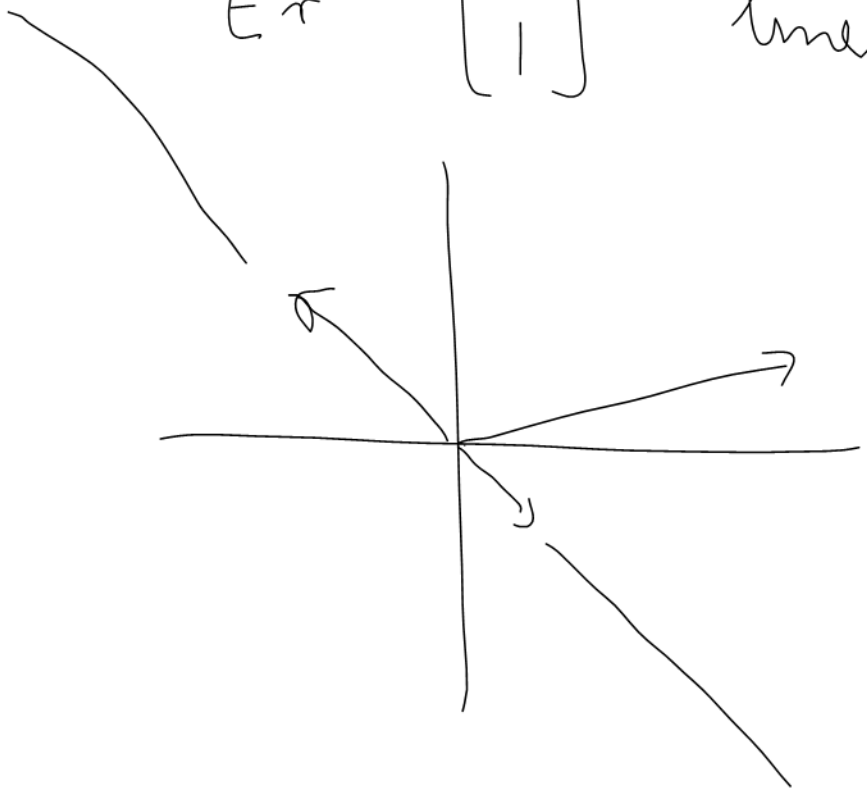
$\frac{E_k}{E_r}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linear combination of

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

of $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$



Nej

Prikprodukt, norm, ortogonalitet

Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ være vektorer i \mathbb{R}^n .

Så er **prikproduktet** af \mathbf{u} og \mathbf{v} defineret som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

\mathbf{u} og \mathbf{v} siges at være **ortogonale** hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Normen (længden) af \mathbf{u} er

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

Eks

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1$$

Eks

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$$

ortogonale

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Afstanden mellem \mathbf{u} og \mathbf{v} er $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Normalisering af \mathbf{v} :

Hvis $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ så er $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ en vektor med norm 1.

Pythagoras: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ hvis og kun hvis $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{u}\|^2 = 9, \quad \|\vec{v}\|^2 = 2^2 + 2^2 + (-3)^2 = 17$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= 4^2 + 3^2 + (-1)^2 = 26 \\ &= 9 + 17 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

Ortogonal projektionen af \mathbf{u} på linien med retningsvektor \mathbf{v} , hvor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ beregnes som

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}.$$

