

Matrix-vektor-produkt

Hvis $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n]$ er en $m \times n$ matrix med søjler $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$

og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ så er $A\mathbf{v}$ vektoren

$$A\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m.$$

Ehs

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Alternativ beregning

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 70 \\ * \end{bmatrix}$$

$$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$$

Indgang nr. i i $A\mathbf{v}$ fås som prikprodukt af A 's række nr. i og \mathbf{v} .

Udvalgte regneregler:

Hvis $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ så er $I_n \mathbf{v} = \mathbf{v}$, hvor I_n er $n \times n$ identitetsmatricen.

Hvis $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n]$ så er $\underline{Ae_j} = \mathbf{a}_j$, hvor e_j er den j 'te standardvektor i \mathbb{R}^n .

$$(A + B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v}$$

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

$$\underbrace{A}_{\lambda} \mathbf{c}\mathbf{v} = cA\mathbf{v}$$

Lineære ligningsystemer

En **lineær ligning** er en ligning på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

hvor x_1, x_2, \dots, x_n er variable (ubekendte) og a_1, a_2, \dots, a_n, b faste (kendte) tal.

F.eks.

$a_1x_1 + a_2x_2 = b$ eller $a_1x + a_2y = b$ som er ligningen for en linie i planen.

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ eller $a_1x + a_2y + a_3z = b$ som er ligningen for en plan i rummet.

Et **lineært ligningssystem** består af et antal (f.eks. m) lineære ligninger, der alle har de samme variable:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ligningssystemet kan også skrives som

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .$$

Eller som $Ax = b$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A kaldes **koefficientmatricen** for ligningssystemet.

Den **udvidede koefficientmatrix** (totalmatrix) er

$$[Ab] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \dots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Vi siger at et ligningssystem er **konsistent** hvis det har mindst én løsning. Ellers er det **inkonsistent**.

Eks

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = -4$$

$$x_1 \quad \quad -2x_3 = 3$$

Koefficientmatrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Udvidet koefficientmatrix

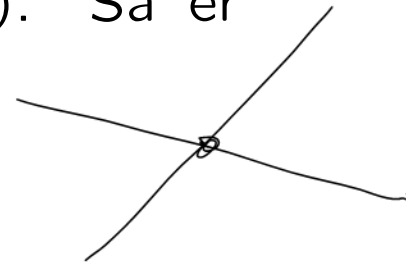
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Eksempel på mulige løsningsmængder:

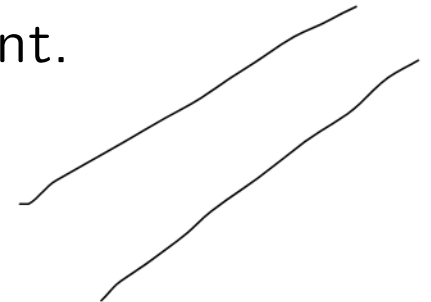
To lineære ligninger med to ubekendte x og y : De to ligninger er ligning for to linier, hhv. l_1 og l_2 .

Tre muligheder:

- De to ligninger skærer hinanden i ét punkt, (a, b) . Så er $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ en løsning. Dette er den eneste løsning.



- Linierne l_1 og l_2 er parallelle og skærer ikke hinanden. Ligningssystemet har ingen løsning. Det er inkonsistent.



- $l_1 = l_2$. Løsningsmængden er uendelig.

Elementære rækkeoperationer:

1. ombyt række i og række j : $r_i \leftrightarrow r_j$

2. gange række i med tal $c \neq 0$: $cr_i \rightarrow r_i$

3. adder c gange række i til række j : $r_j + cr_i \rightarrow r_j$

Hvis matricen B fremkommer fra matricen A ved én af disse rækkeoperationer så kan A fås fra B ved anvendelse af henholdsvis

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad \frac{1}{c}r_i \rightarrow r_i, \quad r_j - cr_i \rightarrow r_j.$$

Ehs

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

—————>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$R_2 + R_1 \rightarrow R_2$$
$$R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$$

—————>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$$

—————>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3$$

—————>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 + 2R_3 \rightarrow R_1$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$$

Eks

$$x_1 - 2x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4$$

Udvidet koefficientmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$$

→

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_3 - R_2 \rightarrow R_3$$

→

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 er fri variabel

$$x_1 - 2x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 + 2x_3$$

$$x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eks

Udvidet koeff. matrix for
lign. syst.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ligning 3 :

$$0 = 1$$

inkonsistent
ligningsystem