

Trappeform, Gausselimination

En matrix siges at være på **trappeform** (række-echelon form) hvis

1. rækker der kun har 0'er står nederst i matricen,
2. første indgang forskellig fra 0 i en række (den **ledende indgang** i rækken) står i en søjle til højre for første indgang forskellig fra 0 i rækken ovenover.

Hvis indgang (i, j) i en matrix på trappeform er en ledende indgang i en ikke-0 række, så siges denne indgang at være en **pivot**.

Matricen A siges at være på **reduceret trappeform** (reduceret række-echelon form) hvis den er på trappeform og opfylder

4. hvis a_{ij} er den ledende indgang i række i så er $a_{lj} = 0$ for alle $l \neq i$

5. den ledende indgang i hver række er 1.

Enhver matrix B kan ved et antal elementære rækkeoperationer omskrives til en *entydig* matrix på reduceret trappeform.

Denne entydige matrix benævnes $\text{rref}(B)$.

(Forkortelse for reduced row echelon form; MATLAB notation).

$$\begin{bmatrix} \underline{3} & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \underline{5} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{-3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{4} \end{bmatrix}$$

Trappeform

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

IKKE Trappeform

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix}$$

Reduceret
Trappeform

Gausselimination:



Omskrivning af matrix til trappeform.

Betragt søjlerne én ad gangen fra venstre mod højre.

Hvis første søjle er en 0-søjle, så se bort fra den og fortsæt med næste søjle.

Hvis første søjle har indgange $\neq 0$, så foretag eventuelt rækkeombytning sådan at øverste indgang er $\neq 0$. Denne indgang er en pivotindgang. Adder et multiplum af første række til hver af de andre rækker, sådan alle tal under pivotindgangen er 0.

Se bort fra første søjle og første række og fortsæt med næste søjle indtil alle søjler er behandlet.

Omskrivning af matrix på trappeform til reduceret trappeform: Betragt pivotsøjlerne fra højre mod venstre.

Løsning af lineære ligningssystemer:

Hvis $[A \ b]$ er den udvidede koefficientmatrix for et ligningssystem og $\text{rref}([A \ b]) = [R \ c]$ så har ligningssystemet med udvidet koefficient matrix $[R \ c]$ de samme løsninger som det oprindelige ligningssystem.

Løsning af ligningssystem med udvidet koefficientmatrix på reduceret trappeform:

Hvis det er pivot i sidste søjle så er ligningssystemet inkonsistent. Ellers er ligningssystemet konsistent og

hvis søjle nr. j ikke har pivot så er x_j er **fri variabel** og

hvis søjle nr. j har pivot så kan x_j udtrykkes ved hjælp af de frie variable (og tal i matricen).

Eks

Ligningsystem med udvidet koef. - matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 + R_1 \rightarrow R_3 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - R_2 \rightarrow R_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trappeform

Pivot i sidste søjle : ikke konsistent

Eks Ligningsystem med matrix
på reduceret trapeform

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ikke pivot i søjle 3 og 5 (og 6)
 x_3 og x_5 er frie

$$x_1 + x_3 - x_5 = 2$$

$$x_2 - x_3 + x_5 = 1$$

$$x_4 - x_5 = 3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + x_5 + 2 \\ x_3 - x_5 + 1 \\ x_3 \\ x_5 + 3 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ekse

For hvilke t er lign. syst.
konsistent

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & t & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & t & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & t-2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & t+1 & 7 \end{bmatrix}$$

Hvis $t+1 = 0$ er 7 pivot: inkonsistent
Ellers er $t+1$ pivot konsistent
Konsistent hvis $t \neq -1$

Definition: **Rangen** af en matrix A er antallet af pivotindgange i matricen, skrives $\text{rank } A$.

Definition: **Nulliteten** af en matrix A er antallet af søjler uden pivot; skrives $\text{nullity } A$.

Hvis A har n søjler så er

$$\text{rank } A + \text{nullity } A = n.$$

Hvis A er koefficient matrix for et *konsistent* ligningssystem så er antallet af frie variable i løsningen: $\text{nullity } A$.

Mængden udspændt af \mathcal{S}

$\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$: en mængde af vektorer i \mathbb{R}^n .

Mængden af alle vektorer i \mathbb{R}^n , der er linear kombination af vektorerne i \mathcal{S} kaldes mængden (rummet) udspændt af \mathcal{S} .

Skrives: $\text{Span } \mathcal{S}$.

Hvis $A = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_k]$ er en $n \times k$ matrix og $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ så er

$$\mathbf{v} \in \text{Span } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$$

hvis og kun hvis

ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ er konsistent.

(Sætning 1.6)

$$\text{Span} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \} = \mathbb{R}^n$$

hvis og kun hvis

$A = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_k]$ har pivotposition i alle rækker.

$$A \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \vec{x} = \vec{b} \quad \text{er konsistent for alle } \vec{b}$$