Span og lineær uafhængighed

$\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$: en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$, der er linear kombination af vektorerne i $\mathcal{S}$ kaldes mængden (underrummet) udspændt af $\mathcal{S}$.
Skrives: Span $\mathcal{S}$.

En vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ ligger i Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$
hvis og kun hvis
$[\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k\ \mathbf{v}]$ ikke har pivotposition i sidste søjle.

En mængde $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ af vektorer i $\mathbb{R}^n$ siges at være

lineært afhængig hvis der findes skalarer $c_1, c_2, \ldots, c_k$, som ikke alle er 0 sådan at $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.

lineært uafhængig hvis ligningen

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 \ldots + x_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

kun er opfyldt når $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0$.

Enhver mængde af vektorer er enten lineært afhængig eller lineært uafhængig, men ikke både lineært afhængig og lineært uafhængig.

Ovenstående ligning er **homogen**, idet højresiden er nulvektoren.

Når en løsningen til et homogent ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ skrives på vektorform med metoden fra afsnit 1.3, så skrives den som linear kombination af lineært uafhængige vektorer, (forudsat at der er frie variable).

Frie variable x_4, x_6, x_9

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} + x_9 \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

lineært uafhængige

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$: en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

(Sætning 1.6)
Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} = \mathbb{R}^n$
hvis og kun hvis
$A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k]$ har pivotposition i alle rækker.

(Sætning 1.8)
$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er lineært uafhængig
hvis og kun hvis
$A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k]$ har pivotposition i alle søjler.

Eks

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Er span $S = \mathbb{R}^3$?

Er S lineært uafhængig ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \end{bmatrix}$$

Pivot i alle rækker: span $S = \mathbb{R}^3$

Ikke pivot i alle søjler: S er lineært afhængig

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Eks</u>

Er $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

lineært uafhængig? (By inspektion)

Nej $\vec{u}_3 = 3 \cdot \vec{u}_1$

$$3\vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + (-1)\vec{u}_3 = \vec{0}$$

Eks

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix} \right\}$$

For hvilke t er S lineært uavhengig.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & t \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1 \to R_3]{R_2-2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+3R_2 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & t+3 \end{bmatrix}$$

S er lineært avhengig hvis $t = -3$

S er lineært uavhengig hvis $t \neq -3$.

Sætning 1.7

Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} =$ Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\}$
hvis og kun hvis
$\mathbf{v} \in$ Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$.

Sætning 1.9

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er lineært afhængig
hvis og kun hvis
enten $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ eller der findes $j \geq 2$ sådan $\mathbf{u}_j$ er linear kombination af $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$.

Hvis søjle j i $A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k]$ ikke er en pivotsøjle så er $\mathbf{u}_j$ en linear kombination af $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$.

Hvis $\vec{u}_1 = \vec{0}$ så $\{\vec{u}_1\}$ L.A.

Hvis $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ så $\{\vec{u}_1\}$ L.U. og $\text{span}\{\vec{u}_1\}$ linie gennem $\vec{0}$

Hvis $\vec{u}_2 \in \text{span}\{\vec{u}_1\}$

så $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ L.A.

Ellers $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ plan