Funktioner, lineære transformationer

En funktion (afbildning, transformation) $f : A \mapsto B$ knytter til hvert element $x \in A$ et entydigt element $f(x) \in B$.

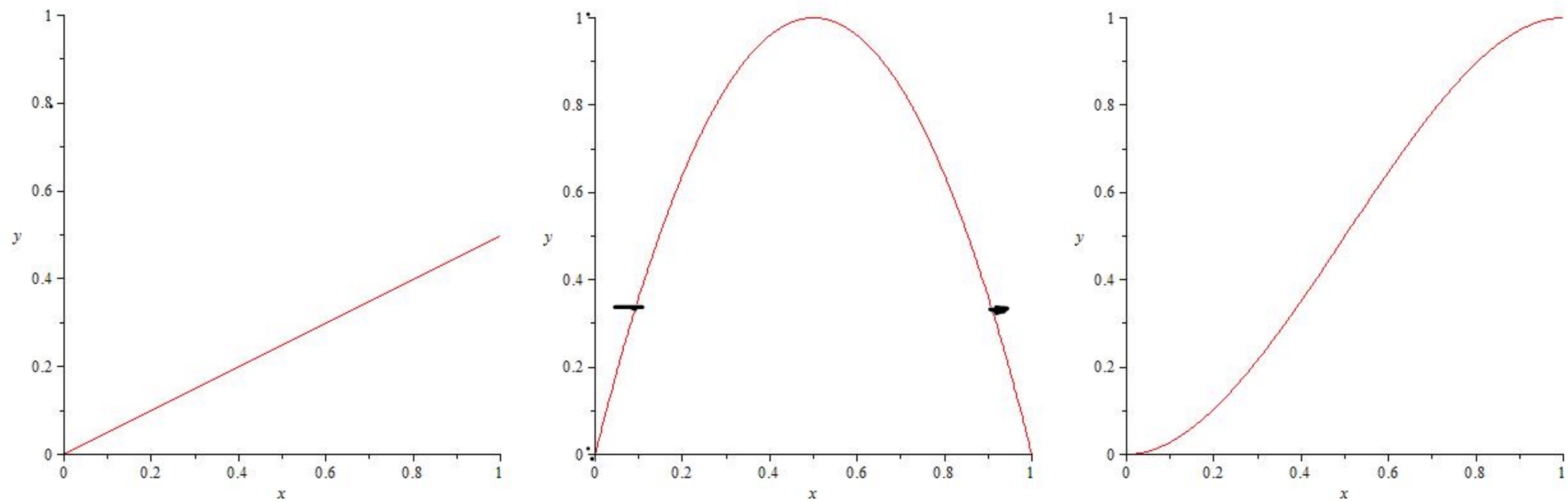
A kaldes definitionsmængden (domænet) for f.
B kaldes (codomænet) for f.
$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ kaldes billedmængden (værdimængden, range) af f.

(Der findes ikke noget anerkendt dansk ord for codomain.)

Lad $f : A \mapsto B$ være en funktion, hvor A og B er vilkårlige mængder.

f siges at **enentydig** eller **injektiv** (engelsk: one-to-one, kan evt. skrives $1-1$) hvis $f(x_1) \neq f(x_2)$ når x_1 og x_2 er forskellige elementer i A.

f siges at være **på** eller **surjektiv** (engelsk: onto) hvis der for ethvert element $b \in B$ findes et element $a \in A$ så $f(a) = b$.



Tre funktioner hvor $A = B = [0, 1]$. Disse er henholdsvis

- enentydig, men ikke på
- på, men ikke enentydig
- enentydig og på.

Sammensat funktion:

Hvis $f : A \mapsto B$ og $g : B \mapsto C$
så er $g \circ f : A \mapsto C$ funktionen, der opfylder $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Hvis $f : A \mapsto B$ er enentydig og på så findes der for ethvert element $b \in B$ et entydigt element $a \in A$ som opfylder $f(a) = b$. Dette entydige element skrives $a = f^{-1}(b)$.
Så er $f^{-1} : B \mapsto A$ også en funktion. Den kaldes f's **inverse funktion**.

$f^{-1} \circ f : A \mapsto A$ og $f \circ f^{-1} : B \mapsto B$ er funktioner der opfylder $(f^{-1} \circ f)(a) = a$, for alle $a \in A$ og $(f \circ f^{-1})(b) = b$ for alle $b \in B$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f^{-1}(x) = \ln x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

En funktion $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ siges at være en **lineær transformation** hvis

- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og

- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ for alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}$.

En transformation $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ er lineær hvis og kun hvis

$$T(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og alle $a, b \in \mathbb{R}$.

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ opfylder

$$T(a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k) = a_1T(\mathbf{u}_1) + \ldots a_kT(\mathbf{u}_k)$$

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ opfylder $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Hvis A er $m \times n$ matrix så defineres $T_A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ved $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. T_A siges at være en **matrix transformation**.

Enhver matrix transformation er en lineær transformation.

Hvis $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ er en lineær transformation og

$$A = [\underbrace{T(\mathbf{e}_1)}\ \underbrace{T(\mathbf{e}_2)} \ldots T(\mathbf{e}_n)]$$

så er $T(\mathbf{v}) = T_A(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
A kaldes **standardmatricen** for T.

Enhver lineær transformation er altså en matrix transformation.

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, T er lineær

Standardmatrix for T:

$$A = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & T(\vec{e}_3) & T(\vec{e}_4) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 \end{bmatrix}$$

Billedmængden af T:

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\} =$$

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$$

$$\vec{a}_4 = \vec{a}_1 \quad \text{og} \quad \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_3$$

Lad $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix. A er $m \times n$.

Billedmængden af T er rummet udspændt af søjlerne i A.

Følgende betingelser er ækvivalente

- T er på
- A's søjler udspænder $\mathbb{R}^m$
- A har pivot i alle rækker
- rank $A = m$

Lad $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix, altså $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. A er $m \times n$.
Nulrummet af T er mængden

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{A\mathbf{x} = \mathbf{0}}\}.$$

Følgende betingelser er ækvivalente

- T er **enentydig (injektiv)**
- nulrummet af T er $\{\mathbf{0}\}$
- A har pivot i alle søjler

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_2 \to R_2]{R_1 + 2R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot i alle rekker: T er på

Løs $A\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - x_4 \\ -x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nulrummet af T:

$$\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

T ikke injektiv

ikke pivot i alle søjler