Matrixmultiplikation

Hvis A er en $m \times n$ matrix og $B = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p]$ er en $n \times p$ matrix så defineres **matrixmultiplikation** af A og B ved

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \ldots A\mathbf{b}_p].$$

Bemærk at hvis (antal søjler i A) $\neq$ (antal rækker i B) så er AB ikke defineret.
Anden metode til beregning af AB:

$$\text{indgang } (i,j) \text{ i } AB = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$

altså prikproduktet af A's række nr. i og B's søjle nr. j.

A en $m \times n$ matrix.
B en $r \times p$ matrix.

Produktet AB kan udregnes hvis $n = r$
og resultatet er så en $m \times p$ matrix.

$$
\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} * & 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * & * \\ * & 3 & * & * & * & * \\ * & 4 & * & * & * & * \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 70 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}
$$

$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$

Eks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 8 & 1\cdot 6 + 2\cdot 9 & 1\cdot 7 + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 8 & 3\cdot 6 + 4\cdot 9 & 3\cdot 7 + 4\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & 54 & 21 \end{bmatrix}$$

Udvalgte regneregler (når matricernes størrelse gør at udtrykkene er defineret):

$$A(BC) = (AB)C$$
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC$$
$$I_m A = A I_n = A$$
$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Matrixmultiplikation er *ikke kommutativ*. Altså: det er almindeligt at

$$AB \neq BA$$

når begge produkter er defineret.

Hvis $B = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_p]$ er en $n \times p$ matrix og $C = [\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_q]$ er en $n \times q$ matrix så indføres en $n \times (p+q)$ matrix

$$[B\ C] = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_p\ \mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_q].$$

Hvis A er en $m \times n$ matrix så er

$$A[B\ C] = [A\mathbf{b}_1 \dots A\mathbf{b}_p\ A\mathbf{c}_1 \dots A\mathbf{c}_q] = [AB\ AC].$$

Sammensat funktion

Hvis $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ og $S : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ er lineære transformationer med standardmatricer henholdsvis A og B, så er

$$S \circ T = ST : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$$

en lineær transformation med standardmatrix BA.

Altså

$$T_B T_A = T_{BA}.$$

Eks

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{linear}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Standardmatrix for T

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{linear}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Standardmatrix for S

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$S \circ T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear

Standardmatrix for $S \circ T$:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$