Invers matrix

En $n \times n$ matrix A siges at være **invertibel** (inverterbar) hvis der findes en $n \times n$ matrix B så

$$AB = BA = I_n.$$

B siges da at være den **inverse** til A, skrives: $B = A^{-1}$.

Hvis A er en invertibel $n \times n$ matrix og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ så har ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en entydig løsning:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) & 1\cdot(-1) + 2\cdot\frac{1}{2} \\ 1\cdot 2 + 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 1\cdot(-1) + 4\cdot\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_2$$

$$BA = I_2$$

$$A^{-1} = B$$

$\cancel{\frac{C}{A}}$ $\quad CA^{-1} \neq A^{-1}C$

Regneregler for invers matrix.

Lad A og B være invertible $n \times n$ matricer. Så er

- A^{-1} invertibel og $(A^{-1})^{-1} = A$,
- AB invertibel og $(AB)^{-1} = \underline{B^{-1}A^{-1}}$,
- A^T invertibel og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} =$$
$$A I_n A^{-1} =$$
$$A A^{-1} = I_n$$

Elementære matricer

Lad A være en matrix med m rækker

Hvis E fremkommer fra $\underline{I_m}$ ved anvendelse af en elementær rækkeoperation
så fremkommer EA fra A ved anvendelse af den samme elementære rækkeoperation.

E siges da at være en **elementær matrix**.

Eks | Elementar Matrix | Invers

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_4 \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 \xrightarrow{R_4 + 2 \cdot R_2 \to R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enhver elementær matrix er invertibel.

- Hvis E fremkommer fra I_n ved rækkeombytning så er $E^{-1} = E$.

- Hvis E fremkommer fra I_n ved at skalere række i med en faktor $c \neq 0$ så fremkommer E^{-1} fra I_n ved at skalere række i med en faktor $\frac{1}{c}$.

- Hvis E fremkommer fra I_n ved at addere c gange række i til række j så fremkommer E^{-1} fra I_n ved at addere $-c$ gange række i til række j.

Enhver matrix A kan omskrives til en matrix $R = \texttt{rref}(A)$ på reduceret trappeform ved hjælp af elementære rækkeoperationer, der svarer til multiplikation med elementære matricer, hhv. $E_1, E_2, \ldots, E_k$

Så er

$$E_k \ldots E_2 E_1 A = R.$$

Der findes altså en invertibel matrix P ($P = E_k \ldots E_2 E_1$) så

$$PA = R$$

$P^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}.$

(Theorem 2.6)
Lad A være en $n \times n$ matrix. Så er følgende udsagn ækvivalente

- A er invertibel.
- A har pivot i alle søjler.
- A har rang n.
- $\texttt{rref}(A) = I_n$.

(Theorem 2.6)
Hvis A og B er $n \times n$ matricer, der opfylder

$$AB = I_n$$

så er

$$BA = I_n$$

og dermed er A og B invertible, $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$.

Algoritme til beregning af invers:
Lad A være en $n \times n$ matrix. Betragt følgende $n \times 2n$ matrix

$$[A\ I_n].$$

Omskriv denne matrix til reduceret trappeform på følgende form

$$[R\ B].$$

- Hvis $R = I_n$ så er A invertibel og $A^{-1} = B$.

- Hvis $R \neq I_n$ så er A ikke invertibel.
  (Allerede når man ser at der ikke kan være pivot i de første n søjler, kan man konkludere at A ikke er invertibel.)

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$ Find invers

$$[A\, I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Elementar matrices

$$I_2 \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

E_2

E_3

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1$$

Ligningssystemer og invers matrix:
Hvis A er en invertibel $n \times n$ matrix så kan løsningen til et ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ findes som

$$\mathbf{c} = A^{-1}\mathbf{b},$$

men hvis den inverse ikke er kendt er det nemmere finde løsningen med den sædvanlige metode:

$$[A \ \mathbf{b}] \to \ldots \to [I_n \ \mathbf{c}].$$

Hvis $B = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p]$ er en $n \times p$ matrix så kan ligningssystemerne

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p$$

skrives som $AX = B$ hvor $X = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_p]$ er en $n \times p$ matrix.
Løsningen $X = A^{-1}B$ kan beregnes på følgende måde

$$[A \ B] \to \ldots \to [I_n \ A^{-1}B].$$

Eks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Find $A^{-1}B$:

$$[A\ B] = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -6 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Inverse lineære transformationer

Lad $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix. A er $m \times n$.
Følgende betingelser er ækvivalente

- T har en **invers funktion**
- rank $A = n = m$
- A har en invers matrix.

Den inverse funktion af T er da den lineære transformation med standardmatrix A^{-1}.