Determinanter

A: en $n \times n$ matrix.
På plads (i, j) står der a_{ij}.

A_{ij}: en $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fås fra A ved at fjerne række i og søjle j.

Definition af determinant.

$n = 1$: $\det[a_{11}] = a_{11}$

$n \geq 2$: $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$

(i,j)-cofaktor: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Definition af determinant:
$\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + \ldots + a_{1n}c_{1n}$.

$n = 2$: $\quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$,
og hvis $ad - bc \neq 0$ så er matricen invertibel med invers

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3 \cdot 11 - 5 \cdot 7 = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

A: en $n \times n$ matrix.
På plads (i, j) står der a_{ij}.

A_{ij}: en $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fås fra A ved at fjerne række i og søjle j.

(i, j)-cofaktor: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Sætning 3.1+
Udvikling efter række i:

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots + a_{in}c_{in}.$$

Udvikling efter søjle j:

$\det A = \det A^T$

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots + a_{nj}c_{nj}.$$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Udvikling efter række 1 (definition)

$$\det A = 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$2 \cdot 0 - 0 + 1 \cdot (3 \cdot 0 - 2 \cdot 5) = -10$$

Udvikling efter række 3:

$$5 \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 0 + 0 = 5 \cdot (-2) = -10$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Udvikling efter søjle 2:

$$\det A = -0 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} - 0$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 5) = -10$$

Determinanten af en **øvre triangulær** matrix er produktet af diagonalindgangene:

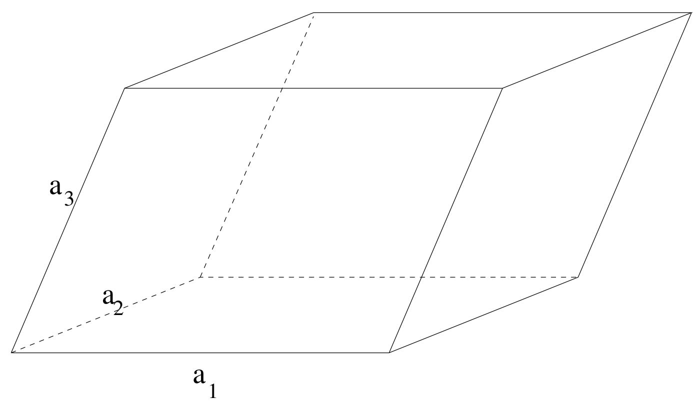
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

og en **nedre triangulær** matrix:

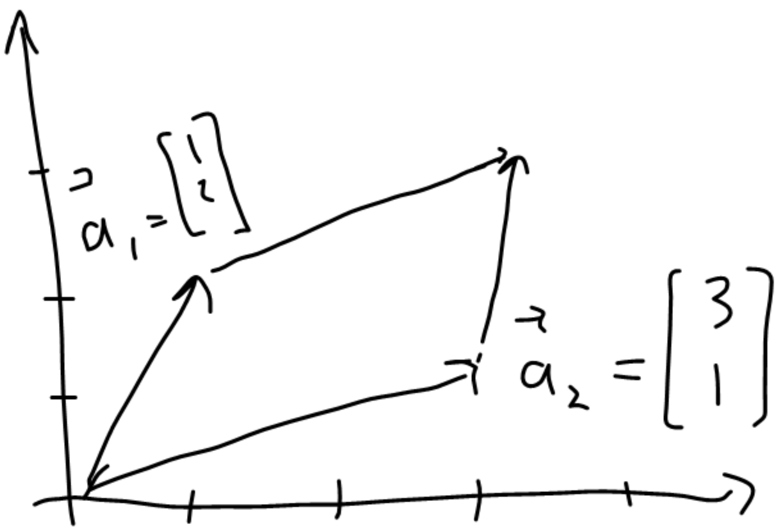
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Lad $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$.
$|\det[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]|$ er da arealet af et parallelogram udspændt af $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

Lad $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$.
$|\det[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]|$ er da rumfang af et parallelepipedum udspændt af $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.



Eks



Areal: $\left| \det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right| =$

$$\left| 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \right| = |-5| = 5$$

Elementære rækkeoperationer på determinanter.

Matricen B fås fra A ved at udføre en af disse rækkeoperationer:

1. gang en række med et tal $k \neq 0$
   $\det(B) = k \det(A)$ altså $\det(A) = \frac{1}{k} \det(B)$.

2. række i erstattes af (række i) $+ k \cdot$ (række j), $i \neq j$
   determinanten er uændret: $\det(B) = \det(A)$.

3. ombyt to rækker.
   determinanten skifter fortegn: $\det(B) = -\det(A)$.

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 5\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{=}$$

$$-5\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 - 3R_1 \to R_2 \\ R_3 - 2R_1 \to R_3}}{=} -5\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = -10$$

Egenskaber for determinanter. A og B er $n \times n$ matricer.

- A har en invers hvis og kun hvis $\det(A) \neq 0$.
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- $\det(A^T) = \det(A)$.

Sidstnævnte egenskab betyder at determinanter kan beregnes ved udvikling efter en søjle.