Dimension af underrum

V: underrum af $\mathbb{R}^n$.
Hvis $V \neq \{\mathbf{0}\}$ så har V uendeligt mange baser.

Alle baser for V har det samme antal vektorer.

Antallet af vektorer i en basis for V kaldes **dimensionen** af V, skrives $\dim V$.

Vi definerer desuden $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

V: underrum af $\mathbb{R}^n$.

Antag $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er en lineært uafhængig mængde af vektorer i V.
Så er $k \leq \dim V$.
Hvis $k = \dim V$ så er $\mathcal{S}_1$ en basis for V.

Antag $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er en mængde af vektorer i V, der udspænder V.
Så er $p \geq \dim V$.
Hvis $p = \dim V$ så er $\mathcal{S}_2$ en basis for V.

Eks

$$V = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \qquad \dim V \leq 2$$

$$\vec{u} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in V$$

$$\vec{v} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in V$$

$$\begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot i begge sigler $\Rightarrow$

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ lineært uafhængig

$\dim V = 2$ og $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ er basis for V.

Underrum knyttet til en matrix
A: en $m \times n$ matrix.

Fra tidligere:
rank $A =$ antal søjler i A med pivot
nullity $A = n -$ rank $A =$ antal søjler uden pivot $=$ antal frie variable i ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Søjler med pivot udgør en basis for søjlerummet, Col A.
Altså $\dim \text{Col } A = \text{rank } A$.

En basis for nulrummet af A bestemmes som i afsnit 1.3, med en basisvektor for hver fri variabel.
Altså $\dim \text{Null } A = \text{nullity } A$.

$$\dim \text{Null } A \; + \; \dim \text{Col } A \; = n.$$

Hvis $\texttt{rref}(A) = R$, så er Row $A =$ Row R.
Rækker i R med pivot (altså alle rækker forskellig fra 0) udgør en basis for Row A.

Derfor er $\dim$ Row $A =$ rank A.

Desuden er $\dim$ Row $A =$ rank A^T, da Row $A =$ Col A^T.

Altså rank $A =$ rank A^T.

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rref}(A) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & -7 & 6 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 11 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } A = 2$

$\dim \text{Col } A = 2$

$\dim \text{Row } A = 2$

$\dim \text{Null } A = 5 - 2 = 3$

$\dim \text{Null } A^T = \text{antal søjler i } A^T - \text{rank } A^T$

$= 3 - 2 = 1$

Basis for Col A: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Basis for Row A: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \\ -10 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

<u>Eks</u>

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 \\ 3x_1 + 6x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{bmatrix}$$

T er lineær transformation

T har standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Billedrum for T = Col A har basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Null T = Null A

$$x_1 \quad + 2x_3 = 0 \quad , \quad x_2 - 3x_3 = 0$$

$$x_1 = -2x_3$$
$$x_2 = 3x_3$$
x_3 free

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for Null T : $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$