Matrix repræsentation af lineær operator

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ kaldes en lineær operator på $\mathbb{R}^n$.

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ så defineres matrix repræsentationen af T m.h.t. $\mathcal{B}$ som

$$[T]_{\mathcal{B}} = [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}\ \dots\ [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}}].$$

$[T]_{\mathcal{B}}$ er den entydige $n \times n$ matrix, der opfylder

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

for enhver vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}} [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$$

$$T(\vec{v}) = A \vec{v}$$

Matrix repræsentationen af T m.h.t. standardbasen $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ er standardmatricen for T:

$$A = [T]_{\mathcal{E}} = [\underline{T(\mathbf{e}_1)}\ T(\mathbf{e}_2)\ \ldots\ T(\mathbf{e}_n)].$$

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ og lad $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \ldots\ \mathbf{b}_n]$.

Lad A være standardmatricen for en lineær operator T på $\mathbb{R}^n$. Så bestemmes matrix repræsentationen af T m.h.t. $\mathcal{B}$ ved

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB,$$

og standardmatricen kan bestemmes ved

$$A = B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1}.$$

<u>Eks</u>

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$ linear operator på $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$ basis for $\mathbb{R}^2$

Find $[T]_{\mathcal{B}}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ $\det B = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 6\\1 & 1\end{bmatrix}$$

Alternativ metode

Standard matrix for T: $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB = \begin{bmatrix}1 & 6\\1 & 1\end{bmatrix}$$

Eks samme $\mathcal{B}$

S: lineær operator med $[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Standardmatrix for S:

$$A = B\,[S]_{\mathcal{B}}\,B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -13 & 11 \end{bmatrix}$$

Hvis A og C er $n \times n$ matricer, der opfylder at der findes en invertibel $n \times n$ matrix P så $C = P^{-1}AP$ så siger vi at A og C er **similære**.

Bemærk at $C = P^{-1}AP$
hvis og kun hvis
$A = PCP^{-1}$ (altså $A = Q^{-1}CQ$, hvor $Q = P^{-1}$).

Desuden: Hvis A og C er similære og C og B er similære, så er A og B similære.

At A og C er similære betyder at de er forskellige matrix repræsentationer af samme lineære operator.

Egenvektorer og egenværdier

Lad A være $n \times n$ matrix.
En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siges at være en egenvektor for A hvis der findes et tal λ (lambda) så

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

λ siges at være en egenværdi for A hørende til egenvektoren $\mathbf{v}$.

Lad T være en lineær operator på $\mathbb{R}^n$.
En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siges at være en egenvektor for T hvis der findes et tal λ så

$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.$$

λ siges at være en egenværdi for T hørende til egenvektoren $\mathbf{v}$.

En egenvektor for en lineær operator er en egenvektor for dens standardmatrix.

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvis $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ så er $A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \vec{v}$

$\vec{v}$ er egenvektor med egenverdi 1

Hvis $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ så er $A\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \cdot \vec{u}$

$\vec{u}$ er egenvektor med egenverdi -2

Hvis $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ så $A\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \vec{w}$

$\vec{w}$ er egenvektor med egenverdi 3

$$\mathcal{B} = \{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$T(\vec{w}) = 3 \cdot \vec{w} + 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$$

$$[T(\vec{w})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{u}) = 0 \cdot \vec{w} - 2 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$$

$$[T(\vec{u})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{v}) = 0 \cdot \vec{w} + 0 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$$

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$