Diagonalisering af matricer

Lad A være en $n \times n$ matrix.
A siges at være diagonaliserbar hvis der findes en invertibel matrix P og en diagonalmatrix D så

$$A = PDP^{-1}.$$

A er diagonaliserbar hvis og kun hvis der findes en basis for $\mathbb{R}^n$, der består af egenvektorer for A.

Hvis $\mathbb{R}^n$ har en basis $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ af egenvektorer, hvor $A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$
så kan P vælges som

$$P = [\mathbf{p}_1 \ \ldots \ \mathbf{p}_n]$$

og D er diagonalmatricen med egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen.

Det er vigtigt at rækkefølgen af søjler i P svarer til rækkefølgen af egenværdier på diagonalen af D.

Eks diagonaliser

$$A = \begin{bmatrix} -26 & -36 \\ 18 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} -26-t & -36 \\ 18 & 25-t \end{bmatrix}$$

$$(-26-t)(25-t) - (-36)\cdot 18 = t^2 + t - 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \qquad D = 1^2 - 4\cdot(-2) = 9$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Egenrom

$\lambda = 1$

$$A - 1 \cdot I_2 = \begin{bmatrix} -26 & -36 \\ 18 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & -36 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$3x_1 + 4x_2 = 0$, x_2 fri

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{x_2}{3} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{Basis} \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$\underline{\lambda = -2}$

$$A + 2I_2 = \begin{bmatrix} -26 & -36 \\ 18 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & -36 \\ 18 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2x_1 + 3x_2 = 0$, x_2 fri

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{x_2}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{Basis } \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Sett $P = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Så er $A = PDP^{-1}$

Diagonaliseringsalgoritme.
A: en $n \times n$ matrix.

Bestem det karakteristiske polynomium for A, og skriv

$$\det(A - xI_n) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k} \underline{g(x)},$$

hvor $g(x)$ er et polynomium, der ikke har nogen (reelle) rødder.

Hvis graden af $g(x)$ er mindst 2 og dermed $m_1 + m_2 + \ldots + m_k < n$ så er A ikke diagonaliserbar.

Hvis $g(x) = \pm 1$ og dermed $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$:
For hver egenværdi λ_i:
find en basis for egenrummet Null $(A - \lambda_i I)$.

Hvis for en af disse egenværdier $\dim \mathrm{Null}\,(A - \lambda_i I) < m_i$ så er A ikke diagonaliserbar.

Ellers:

sæt alle baser for egenrum sammen i en mængde $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$, som er basis for $\mathbb{R}^n$.
Lad $P = [\mathbf{p}_1 \ \ldots \ \mathbf{p}_n]$ og lad

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

være den diagonalmatrix der har egenværdierne for A på diagonalen, sådan at $A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Så er

$$A = PDP^{-1}.$$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = -(t-2)(t^2+4)$$

$t^2 + 4 = 0$ har ingen løsning

A er ikke diagonaliserbar.

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = -(t-2)(t-1)^2$$

Egenværdier

2 med multiplicitet 1

1 med multiplicitet 2

<u>Egenrum</u>

$\lambda = 1$

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + x_3 = 0$ $\qquad$ x_2, x_3 frie

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 2$

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - x_2 = 0$, $x_3 = 0$ $\qquad x_2$ free

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Basis } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Sol $\quad P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Så er $A = PDP^{-1}$

$$D^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{bmatrix}$$

$$A^m = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2^m \end{bmatrix} P^{-1}$$

Anvendelse af diagonalisering.

Hvis $A = PDP^{-1}$ hvor D er diagonalmatricen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

så er

$$A^m = P \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{bmatrix} P^{-1},$$

for ethvert positivt helt tal m.