Ortogonale og ortonormale mængder.

Lad $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{S}$ siges at være ortogonal hvis vektorerne i $\mathcal{S}$ er parvis ortogonale.

$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$

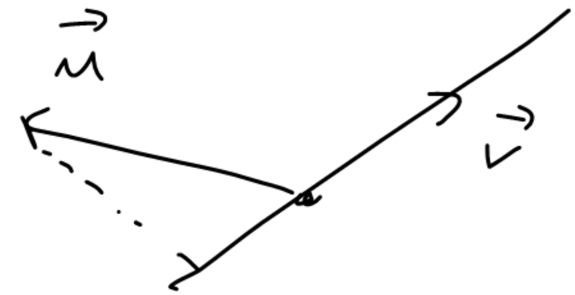
$\mathcal{S}$ siges at være ortonormal hvis $\mathcal{S}$ er ortogonal og vektorerne i $\mathcal{S}$ alle har norm 1.

længde

Enhver ortogonal mængde $\mathcal{S}$ af vektorer forskellig fra $\mathbf{0}$ er lineært uafhængig.

Ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på linien Span$\{\mathbf{v}\}$, hvor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ beregnes som

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v}.$$



Hvis $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en **ortogonal basis** for et underrum W af $\mathbb{R}^n$ og $\mathbf{u} \in W$ så er

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k,$$

hvor

$$c_i = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i}{||\mathbf{v}_i||^2}.$$

Hvis $\mathcal{S}$ er orto*normal* så er

$$c_i = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i.$$

Eks $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3 \cdot 8 + 4 \cdot (-6) = 0$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ er ortogonal

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ er ortonormal

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w}_1 = 3 + 4 = 7$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w}_2 = 4 - 3 = 1$$

$$\vec{u} = 7\,\vec{w}_1 + 1 \cdot \vec{w}_2$$

Gram-Schmidt ortogonalisering.

Lad $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ være en basis for et underrum W af $\mathbb{R}^n$.
Så har W en ortogonal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ der kan bestemmes ved Gram-Schmidt ortogonalisering:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||^2}\mathbf{v}_2$$

$$\ldots$$

En ortonormal basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ kan derefter bestemmes ved normalisering af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, altså ved at beregne $\mathbf{w}_i = \frac{1}{||\mathbf{v}_i||}\mathbf{v}_i$, for $i = 1, \ldots, k$.

Eks

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \|\vec{v}_1\|^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{18}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{v}_2\|^2 = 2^2 + 1^2 + (-2)^2 = 9$$

$$\vec{V}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{-9}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{0}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{V}_3\|^2 = (-2)^2 + 2^2 + (-1)^2 = 9$$

$\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ er ortogonal

$$\|\vec{V}_1\| = \|\vec{V}_2\| = \|\vec{V}_3\| = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{W}_1 = \frac{1}{3}\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \vec{W}_2 = \frac{1}{3}\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \vec{W}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ ortonormal

QR-faktorisering.

$A = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$: en $n \times k$ matrix med lineært uafhængige søjler (og dermed $n \geq k$).

Så findes $n \times k$ matrix $Q = [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k]$ hvor $\{\overset{w_1}{\cancel{\mathbf{u}_1}}, \ldots, \overset{\vec{w}_k}{\cancel{\mathbf{u}_k}}\}$ er en ortonormal mængde,
og en $k \times k$ øvre triangulær matrix R
sådan at $A = QR$.
Dette kaldes QR-faktorisering af A.

$\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ bestemmes fra $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ ved Gram-Schmidt ortogonalisering og normalisering.
R bestemmes ved $r_{ij} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{w}_i$.

$$A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = \vec{u}_1 \cdot \vec{w}_1 = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 3$$

$$r_{12} = \vec{u}_2 \cdot \vec{w}_1 = 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 6$$

$$r_{13} = \vec{u}_3 \cdot \vec{w}_1 = 3$$

$$r_{21} = 0 \quad , \quad r_{22} = 3 \quad , \quad r_{23} = 0$$

$$r_{31} = 0 \quad , \quad r_{32} = 0 \quad , \quad r_{33} = 3$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Så er $A = QR$

Lad $A = QR$ være en QR-faktorisering af en $n \times k$ matrix med lineært uafhængige søjler.

Vi betragter ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Da A har pivot i alle søjler er der *højst* én løsning.

Da $Q^TQ = I_k$ har vi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; QR\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; Q^TQR\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}.$$

Da R er en øvre triangulær matrix med tal $\neq 0$ på diagonalen så er det sidste ligningssystem konsistent og det er let at løse.

Men $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \not\Leftarrow R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$.

For at løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (ved hjælp af QR-faktorisering) skal vi løse $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$ og derefter indsætte løsningen i $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Hvis dette ikke er en løsning så er $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inkonsistent.

$$A\vec{x} = \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$R\vec{x} = Q^T\vec{b}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 5/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 3 & -1/3 \end{array}\right]$$

$$3x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x_3 = -\frac{1}{9}$$

$$x_2 = \frac{1}{9}$$

$$3x_1 + 6 \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{5}{3}$$

$$x_1 = \frac{2}{9}$$

Indsæt i $A\vec{x} = \vec{b}$. OK