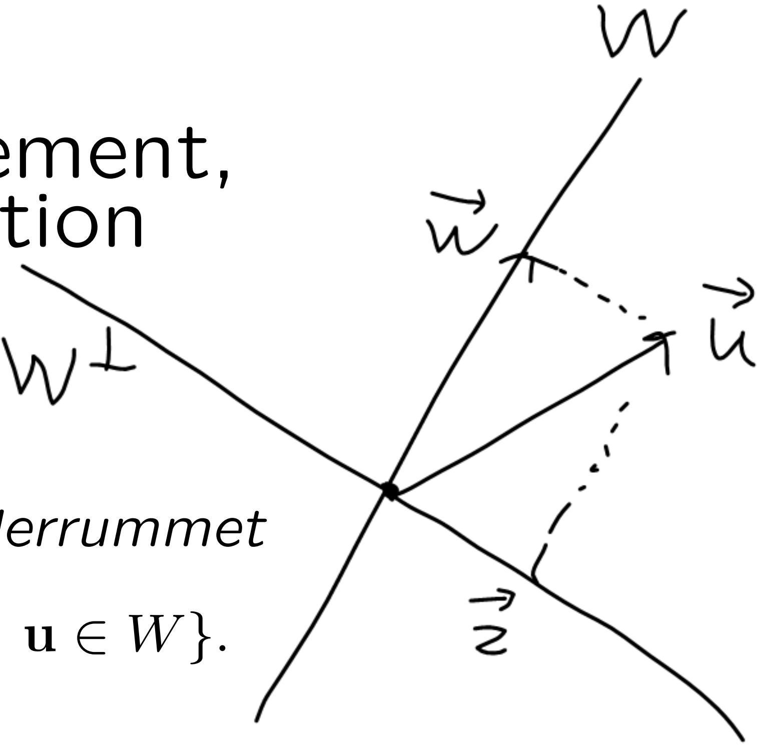
Ortogonalt komplement, ortogonal projektion



W et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Det ortogonale komplement af W er *underrummet*

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \text{ for alle } \mathbf{u} \in W\}.$$

For enhver vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ findes der entydige vektorer $\mathbf{w} \in W$ og $\mathbf{z} \in W^\perp$ så

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}.$$

$\mathbf{w}$ kaldes den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på W,
og betegnes $U_W(\mathbf{u})$.
U_W er da en *lineær* operator på $\mathbb{R}^n$.

Ortogonal projektion.

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$ med $\dim W = k > 0$ og C være en $n \times k$ matrix hvis søjler udgør en basis for W. Så har ortogonalprojektionsoperatoren U_W standardmatrix

$$P_W = C(C^TC)^{-1}C^T.$$

Den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på W kan altså beregnes som

$$U_W(\mathbf{u}) = P_W\mathbf{u},$$

eller, hvis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en *ortonormal* basis, som

$$U_W(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k.$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad W = \text{Span } S$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_W = C\left(C^T C\right)^{-1} C^T$$

$$C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(C^T C) = 7 \cdot 3 - 4 \cdot 4 = 5$$

$$(C^TC)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$P_W = \frac{1}{5} C \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} C^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

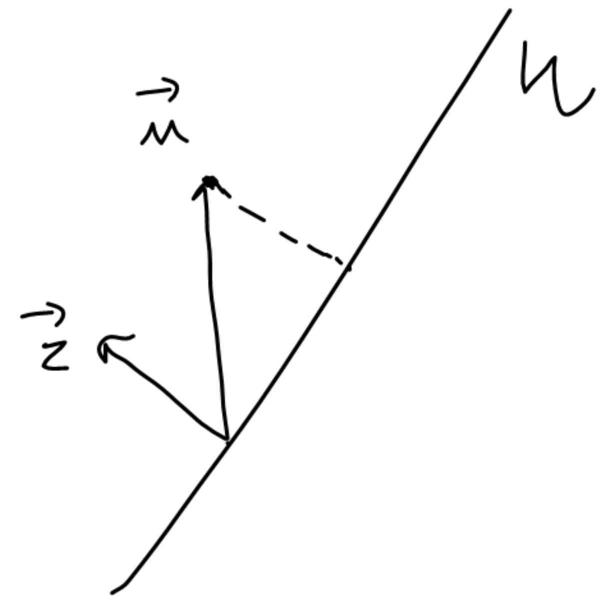
$$U_W(\vec{u}) = P_W \vec{u} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{w}$$

$$\vec{u} = \vec{w} + \vec{z} \qquad , \ \vec{w} \in W, \ \vec{z} \in W^{\perp}$$

$$\vec{z} = \vec{u} - \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Afstand fra $\vec{u}$ til W

$$\|\vec{z}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



Ortogonal projektion.

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$ med $\dim W = k > 0$ og C være en $n \times k$ matrix hvis søjler udgør en basis for W. Så har ortogonalprojektionsoperatoren U_W standardmatrix

$$P_W = C(C^T C)^{-1} C^T.$$

Den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på W kan altså beregnes som

$$U_W(\mathbf{u}) = P_W \mathbf{u},$$

eller, hvis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en *ortonormal* basis, som

$$U_W(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k.$$

$$W = \text{Span}\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}, \quad \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\|q_1\| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = 1, \quad \|q_2\| = 1$$

$\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ er ortonormal basis for W

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Projektion af $\vec{u}$ på W

$$(\vec{u}\cdot\vec{q}_1)\,\vec{q}_1 + (\vec{u}\cdot\vec{q}_2)\,\vec{q}_2 = -2\vec{q}_1 - \vec{q}_2 =$$

$$-2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Underrum knyttet til matricer.

For ethvert underrum W af $\mathbb{R}^n$ er

$$\dim W + \dim W^\perp = n \quad \text{og} \quad (W^\perp)^\perp = W.$$

For enhver matrix A er

$$(\text{Row } A)^\perp = \text{Null } A.$$

Ethvert underrum W af $\mathbb{R}^n$ er søjlerum af en matrix og dermed også rækkerum af den transponerede matrix: $W = \text{Row } A$.
Det ortogonale komplement bestemmes altså som $W^\perp = \text{Null } A$.

Desuden kan vi nu se at enhvert underrum W af $\mathbb{R}^n$ er nulrum af en matrix:
Til underrummet $W^\perp$ findes en matrix A med Row $A = W^\perp$.
Så er Null $A = (\text{Row } A)^\perp = (W^\perp)^\perp = W$.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad W = \text{span } S$$

Find basis for $W^{\perp} = S^{\perp}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Row } A = W$$

$$W^{\perp} = \text{Null } A$$

$$\left(\vec{x} \in W^{\perp} = S^{\perp} \iff A\vec{x} = \vec{0} \right)$$

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

x_3, x_4 free

$$x_1 + x_3 - x_4 = 0, \quad x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 + x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for $W^{\perp}$, $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$