Ortogonale matricer

En $n \times n$ matrix $Q = [\mathbf{q}_1 \ \ldots \ \mathbf{q}_n]$ siges at være ortogonal hvis $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ er orto*normal*, altså hvis $Q^T Q = I_n$.

Hvis Q er en ortogonal matrix så er determinanten

$$\det Q = \pm 1.$$

Hvis P og Q er ortogonale matricer så er PQ en ortogonal matrix.

En $n \times n$ matrix Q er en ortogonal matrix hvis og kun hvis

$$||Q\mathbf{u}|| = ||\mathbf{u}||.$$

Q er altså ortogonal hvis og kun hvis Q bevarer norm (og dermed afstand).

Lad Q være en **ortogonal** 2×2 **matrix**.

Hvis $\det Q = 1$ så er $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ for en vinkel θ.

Q er matricen for en rotation med vinklen θ.

Hvis $\det Q = -1$ så er $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ for en vinkel θ.

Q har egenvektorer $\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ med egenværdier henholdsvis 1 og -1.

Q er matricen for en spejling om linien med retningsvektor $\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$.

Denne linie er egenrum for Q med egenværdi 1.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q er ortogonal

$$\det Q = \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} - \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{12}{13} = 1$$

Q er en rotation

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$\cos\theta = \frac{5}{13}$, $\sin\theta = \frac{12}{13}$, $\theta = 67{,}38^\circ$

Eks

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q er ortogonal

$$\det Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$

Q er en speiling

1 er egenverdi.

Egenrom:

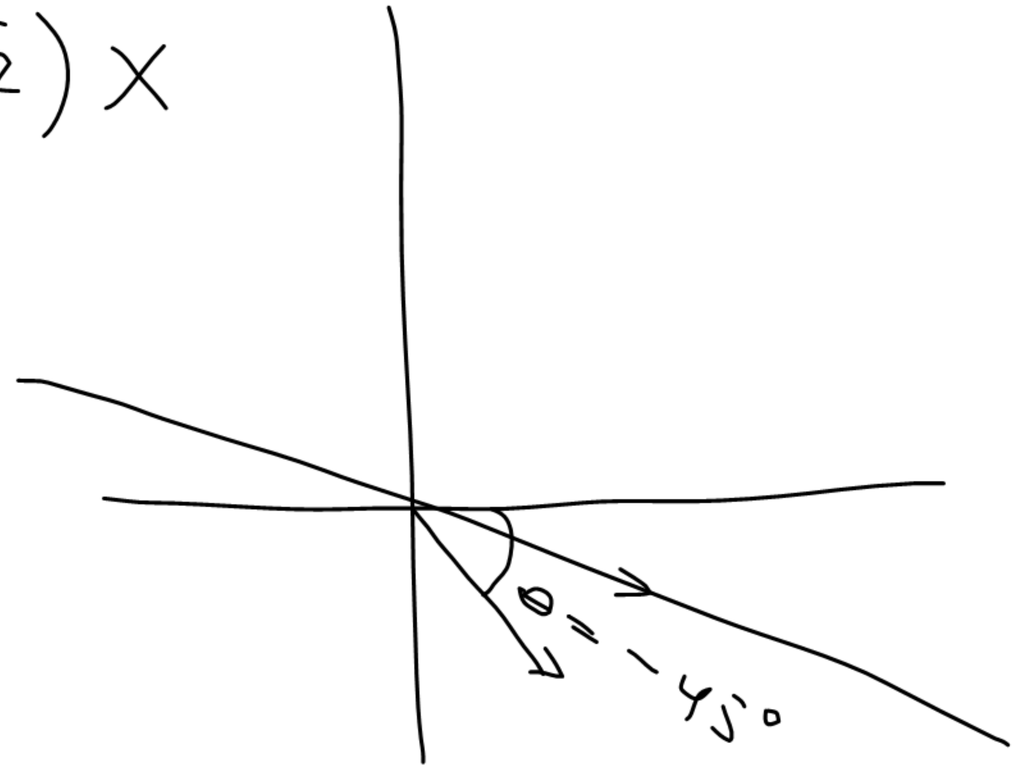
$$Q - I_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 er fri variabel

$$(1-\sqrt{2})\,x_1 - x_2 = 0$$

$x_2 = y = (1-\sqrt{2})\,x$



Lad Q være en **ortogonal** 3×3 **matrix**.

Så er Q matricen for en rotation hvis og kun hvis $\det Q = 1$.

Hvis P og Q er matricer for rotationer i $\mathbb{R}^3$ så er P og Q ortogonal matricer med determinant 1.
Så er PQ også en ortogonal matrix med determinant 1 og derfor er PQ også matricen for en rotation.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Q er ortogonal

1. række

$$\det Q = 0 - 0 + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Q er en rotation

1 er egenværdi.

Egenrum:

$$Q - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 fri, $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Q er rotation om aksen $\operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

En funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ kaldes en **flytning** (rigid motion) hvis den bevarer afstand altså hvis

$$||F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v})|| = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||,$$

for alle vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Lad $\mathbf{b} = F(\mathbf{0})$ og $T(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - \mathbf{b}$. Så er T en lineær transformation og en flytning. Standardmatricen for T er så en ortogonal matrix.

F kan altså skrives som

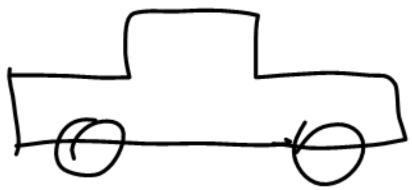
$$F(\mathbf{v}) = Q\mathbf{v} + \mathbf{b},$$

hvor Q er en ortogonal matrix.

(I litteraturen stilles ofte et yderligere krav for at F kaldes en flytning: nemlig at $\det Q = 1$ således at der ikke indgår spejlinger.)

Flytning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

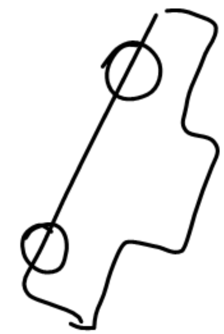
$$F(\vec{v}) = Q\vec{v} + \vec{b}$$



Volvo

venstre-styret

$$\xrightarrow{F}$$



Volvo

V.S. hvis $\det Q = 1$

H.S. hvis $\det Q = -1$

Flytning $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(\vec{v}) = Q\vec{v} + \vec{b}$$

Vi får oplyst

$$F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi regner:

$$F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left(Q\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \vec{b}\right) - \left(Q\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \vec{b}\right) =$$

$$Q\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = Q\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = Q\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \vec{b}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Q\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$