MCG - 4

De polære koordinater for et punkt $P = (x, y)$ i planen er (r, θ) hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ er afstanden mellem $(0, 0)$ og (x, y) og θ er vinklen (regnet med fortegn) mellem x-aksen og vektoren (x, y).

Omregning fra (r, θ) til (x, y):

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Omregning fra (x, y) til (r, θ):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{hvis } x > 0, \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{hvis } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{hvis } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{hvis } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Hvis man regner i grader skal π erstattes af 180°.

De sfæriske koordinater for et punkt $P = (x, y, z)$ i rummet er (ρ, ϕ, θ) hvor $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ er afstanden mellem $(0, 0, 0)$ og (x, y, z) og ϕ er vinklen mellem z-aksen og vektoren (x, y, z). $0 \leq \phi \leq \pi$ (eller $0 \leq \phi \leq 180°$). θ er den samme vinkel som ved polære koordinater for (x, y).

Omregning fra (ρ, ϕ, θ) til (x, y, z):

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\phi.$$

Omregning fra (x, y, z) til (ρ, ϕ, θ):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \arccos \frac{z}{\rho}.$$

θ beregnes som på forrige side.

En linie der går gennem punkter P_0 og P_1 består af punkter der kan skrives som

$$P_0 + t\mathbf{d}, \quad t \in \mathbb{R},$$

hvor $\mathbf{d} = P_1 - P_0$ er vektoren fra P_0 til P_1.

Hvis linien ligger i planen så findes der vektor $\mathbf{n} = (a, b)$ (f.eks. hvis $\mathbf{d} = (b, -a)$) som er vinkelret på linien.

Et punkt $Q = (x, y)$ ligger så på linien hvis og kun hvis

$$\mathbf{n} \cdot (Q - P_0) = 0.$$

Hvis $P_0 = (x_0, y_0)$ så kan denne ligning kan omskrives til

$$ax + by + c = 0,$$

hvor $c = -ax_0 - by_0$. Dette kaldes generaliseret linies ligning.

Hvis $||\mathbf{n}|| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ og $ax + by + c = d$ så ligger punktet (x, y) i afstand $|d|$ fra linie – hvis $d > 0$ på samme side af linien som $\mathbf{n}$ angiver.

En plan der går gennem punkterne P_0, P_1, P_2 består af punkter på formen

$$P_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

hvor $\mathbf{u} = P_1 - P_0$ og $\mathbf{v} = P_2 - P_0$.

Hvis planen ligger i $\mathbb{R}^3$ så findes der en vektor $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (f.eks. $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$) der er vinkelret på planen.

Et punkt $Q = (x, y, z)$ ligger så på planen hvis og kun hvis

$$\mathbf{n} \cdot (Q - P_0) = 0.$$

Hvis $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ så kan denne ligning omskrives til

$$ax + by + cz + d = 0,$$

hvor $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Dette kaldes generaliseret planens ligning.

Hvis $||\mathbf{n}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$ og (x, y, z) er et vilkårligt punkt i rummet så er $|ax + by + cz + d|$ afstanden mellem punktet og linien – hvis $ax + by + cz + d > 0$ ligger punktet på samme side af planen som $\mathbf{n}$ angiver.

Lad P være et punkt i planen der går gennem P_0, P_1, P_2.
Så findes der entydige tal s, t så

$$P = P_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad \text{hvor } \mathbf{u} = P_1 - P_0 \text{ og } \mathbf{v} = P_2 - P_0.$$

Hvis $\mathbf{w} = P - P_0 = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ så kan s og t bestemmes fra ligningerne

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = s(\mathbf{v} \times \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \times \mathbf{w} = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Så er

$$P = P_0 + s(P_1 - P_0) + t(P_2 - P_0) = (1 - s - t)P_0 + sP_1 + tP_2.$$

De barycentriske koordinater for P er altså $(1 - s - t, s, t)$.

Hvis P ligger inde i trekanten så er $1 - s - t \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$.
Hvis et af tallene er negativ så ligger P udenfor trekanten.