Diskret Optimering

Afleveringsopgave 1

1 Indledning

Lad $G = (V, E)$ være en ikke-orienteret graf. En punktmængde $D \subseteq V$ siges at være en dominerende mængde for G hvis der for hvert punkt $x \in V$ gælder enten $x \in D$ eller x er nabo til et punkt i D. Dominanstallet $\gamma(G)$ er det mindste antal punkter i en dominerende mængde for G.

Lad nu G være en graf med punktmængde $\{v_1, \dots, v_n\}$ og lad H være en graf med punktmængde $\{u_1, \dots, u_m\}$. Det kartesiske produkt $G \square H$ er grafen med punktmængde $\{(v_i, u_j) \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m\}$ hvor punkterne (v_i, u_j) og (v_k, u_ℓ) er naboer hvis enten

- $i = k$ og u_j og u_ℓ er naboer i H eller
- $j = \ell$ og v_i og v_k er naboer i G.

Det stærke produkt $G \boxtimes H$ er grafen, der fås fra $G \square H$ ved for alle i, j, k, ℓ at tilføje en kant mellem (v_i, u_j) og (v_k, u_ℓ) hvis v_i og v_k er naboer i G og u_j og u_ℓ er naboer i H.

En formodning af V. G. Vizing fra 1968 siger at $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$, for alle grafer G og H. Vizings formodning er endnu ikke bevist (eller modbevist).

Hovedformålet med opgaven er at bevise at Vizings formodning er sand hvis dominanstallet γ erstattes af γ_f, som er en variant af dominanstallet.

Matricen $A(G) = (a_{ij})$ er $n \times n$ matricen, der opfylder

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } v_i \text{ og } v_j \text{ er naboer} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

2 Opgave

Som inspiration til besvarelse af opgaven anbefales side 282–286 i bogen W. Imrich og S. Klavžar, Product Graphs, John Wiley & Sons, inc., 2000.

- Giv en ækvivalent definition af $\gamma(G)$ som minimum i et heltals programmerings problem og definer det fraktionelle dominanstal $\gamma_f(G)$.
- Lad C_n betegne kredsen med n punkter (og n kanter). Bestem $\gamma(C_n)$ og $\gamma_f(C_n)$ for ethvert $n \geq 3$.
- Findes der et tal $n \geq 3$ så $A(C_n) + I$ er totalt unimodulær.
- Vælg en sammenhængende graf G med 5 eller 6 punkter. Benyt simplex algoritmen til at bestemme $\gamma_f(G)$. Bestem også $\gamma(G)$. Grafen G bør være velegnet til at vise hvordan simplex algoritmen virker og desuden bør den opfylde $\gamma_f(G) \neq \gamma(G)$.
- Bevis Theorem 8.64 og Corollary 8.65 i Imrich og Klavžar.

Der skal afleveres én besvarelse af opgaven fra hver gruppe.