Det teknisk-naturvidenskabelige basisår
Matematik 1A, Efterår 2005, Hold 3
Prøveopgave B

Opgaven består af fire dele, hver med en række spørgsmål, efterfulgt af en liste af teorispørgsmål. I alle opgavespørgsmålene må man gerne bruge Maple, lommeregner osv. til hjælp med udregningerne.

Sidst i hver del er der også nogle åbne spørgsmål, som man kan tage med, hvis der er tid til det.

Del I

Vi skal først se på undersøgelse af en funktion af to variable. Funktionen er givet ved

$$f(x, y) = \frac{x(y-1)}{1 + x^2 + y^2}. \tag{1}$$

1. Start med at tegne grafen for $f(x, y)$ og nogle niveaukurver, ved hjælp af Maple. Bestem derefter de kritiske punkter for $f(x, y)$. For hvert af de fundne kritiske punkter skal man afgøre om det er et lokalt maksimum, et lokalt minimum, eller et sadelpunkt. Man må gerne støtte sig til grafen og niveaukurverne.

2. Vi betragter nu $f(x, y)$ på området givet ved

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 36\}. \tag{2}$$

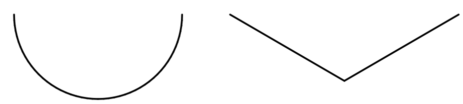
Bestem det absolutte maksimum og det absolutte minimum for $f(x, y)$ på området $\mathcal{R}$. Ved randundersøgelsen kan man blive nødt til at anvende grafiske og/eller numeriske betragtninger for at besvare spørgsmålet, afhængig af fremgangsmåde.

Åbne spørgsmål. Vis, at det fundne globale maksimum og minimum ovenfor på området $\mathcal{R}$ også er henholdsvis det globale maksimum og det globale minimum, når man betragter $f(x, y)$ defineret på hele planen $\mathbf{R}^2$.

Del II

I denne del af opgaven skal vi se på nogle optimeringsproblemer. Opgaven går ud på at forme et fladt stykke blik til for eksempel en tagrende. Vi har givet et stykke blik med bredde L, og skal forme det, så at kapaciteten bliver størst muligt, d.v.s. at tværsnitsarealet bliver størst muligt.

3. Vi ser først på følgende to muligheder. (a) Vi former blikket som en halvcirkel. (b) Vi folder det skarpt på midten. Se Figur 1. Beregn i tilfældet (a) radius og tværsnitsareal. I tilfældet (b) skal man beregne den optimale vinkel for bukningen, og derefter tværsnitsarealet.



Figur 1: Halvcirkel og vinkelbukning

4. Vi vælger nu at bukke blikket som vist på Figur 2. Bestem den form, der giver størst tværsnitsareal. Man skal variere både vinklen og placeringen af de to bukninger, idet man bevarer symmetrien af figuren. Beregn derefter det optimale tværsnitsareal.

Figur 2: Blik bukket to gange

5. Sammenlign nu de tre resultater for tværsnitsarealet, og kommentér dem.

Åbne spørgsmål. I praktiske anvendelser vil der være variationer i L, og i tilfælde (b) ovenfor kan der også være variationer i vinklen. Tilsvarende kan der være variationer i placeringen af bukningerne og i vinklerne i formen vist i Figur 2. Undersøg små variationers indflydelse på kapaciteten (tværsnitsarealet) ved at bruge lineær approksimation (Edwards and Penney afsnit 13.6).

Del III

I denne del ser vi på mindste kvadraters metode. Der er givet et antal punkter (mindst tre) i planen

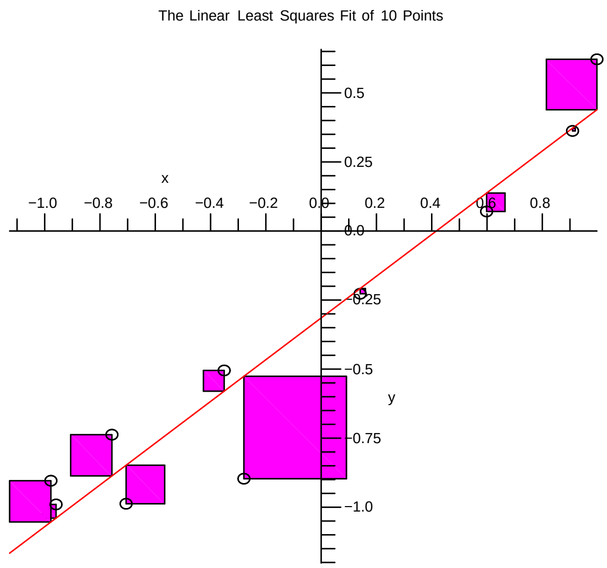
$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

d.v.s. vi antager $n \geq 3$. Vi vil nu minimalisere følgende funktion

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (\alpha x_i + \beta)\big)^2. \tag{3}$$

Denne sum har følgende fortolkning. Størrelsen $|y_i - (\alpha x_i + \beta)|$ er den lodrette afstand mellem punktet (x_i, y_i) og punktet $(x_i, \alpha x_i + \beta)$. Dette sidste punkt ligger på linien $y = \alpha x + \beta$. $E(\alpha, \beta)$ er derfor summen af kvadraterne af disse afstande. Linien repræsenterer derfor den bedste lineære approksimation til beliggenheden af punkterne.

Et eksempel er givet i Figur 3. Målepunkter er afsat som cirkler. Den



Figur 3: Illustration af mindste kvadraters metode

optimale linie er tegnet ind, og kvadratfejlene er illustreret med kvadrater, med sidelængde lig den lodrette afstand fra målepunktet til den optimale linie.

6. Vis, at $E(\alpha, \beta)$ har præcis et kritisk punkt, og find det udtrykt ved de fire størrelser

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad B = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad C = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad D = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{4}$$

Man kan vise, at dette kritiske punkt er et globalt minimum.

7. I praksis kan det vise sig fordelagtigt at gennemføre beregningerne på en lidt anden måde end ovenfor. Man indfører middelværdierne af x_i- og y_i-punkterne. De er givet ved

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{5}$$

Man indfører også afvigelserne

$$x_i = t_i + \overline{x}, \tag{6}$$

eller skrevet som $t_i = x_i - \overline{x}$. Vis nu, at det under 6. fundne minimumspunkt kan skrives som

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} \tag{7}$$

$$\beta = \overline{y} - \alpha \overline{x}. \tag{8}$$

Slut heraf, at punktet $(\overline{x}, \overline{y})$ altid ligger på den optimale linie.

Åbne spørgsmål. Anvend mindste kvadraters metode på et konkret datasæt. Det må gerne være et fra projekt eller andet I kan finde. Der ligger et datasæt på kursets hjemmeside, som man kan anvende som sidste udvej.

Prøv at forklare hvorfor det fundne kritiske punkt er et globalt minimum for funktionen $E(\alpha, \beta)$.

Del IV

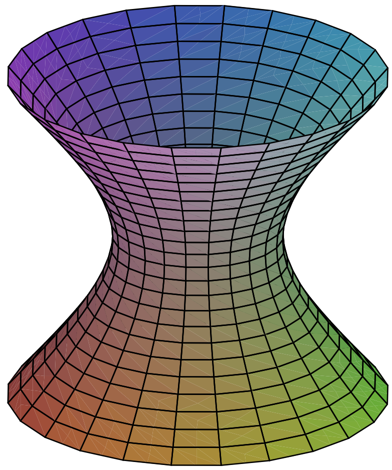
I denne opgave ser vi på en flade beskrevet ved følgende ligning.

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2. \tag{9}$$

Vi vil konstruere et køletårn ved at skære fladen med to planer parallelle med xy-planen. Køletårnet er beskrevet ved mængden

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = a^2,\ |z| \leq h\}. \tag{10}$$

Her er $a > 0$ og $h > 0$ fast valgte parametre. Fladen er skitseret i Figur 4.



Figur 4: Køletårnets krumme flade

8. Bestem en funktion $f(x, y)$ af to variable, hvis billede er K's øvre halvdel. Angiv definitionsmængden for f.

9. Antag, at punktet $P(x_0, y_0, 0)$ ligger på fladen K. Vis, at de to rette linier

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ a \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ -a \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{11}$$

begge ligger på fladen K.

10. Lad $Q(x_1, y_1, z_1)$ være et vilkårligt punkt på fladen K. Vis, at tangentplanen til K i Q er givet ved ligningen

$$x_1 x + y_1 y - z_1 z = a^2. \tag{12}$$

11. For givne værdier af h og a skal man beregne rumfanget af en væske, der fylder hele køletårnet.

Åbne spørgsmål. Resultatet i punkt 9. ovenfor giver en praktisk metode til at konstruere køletårnet. Forklar dette, og konstruér derefter en model af et sådant tårn.

Teorispørgsmål.

Til denne opgave hører følgende emnerfra teorien.

1. Funktioner af flere variable. Graf, niveaukurve og niveauflade.
2. Partielle afledede og deres fortolkning. Retningsafledet.
3. Differential og lineær approksimation.
4. Kædereglen for funktioner af flere variable.
5. Tangentplan og gradientvektor.
6. Integration af funktion af to variable. Dobbeltintegral og itereret integral.
7. Dobbeltintegral i polære koordinater.
8. Anvendelser af dobbeltintegraler.