Nedenfor er nogle eksempler på teoriopgaver af en type, som kan blive stillet til den skriftlige eksamen. Nedenfor er *alle vektorrum endelig dimensionale* over **F**. Denne antagelse vil ikke blive gentaget i opgaveteksten.

Bemærk, at nogle teoriopgaver kun kræver anvendelse af resultater fra bogen, mens andre teoriopgaver kræver en kombination af anvendelse af teorien og udregninger, f. eks. løsning af et lineært ligningssysytem, som man selv skal opstille.

1. Der er givet en liste af vektorer (v_1, v_2, v_3, v_4) i et vektorrum V. Antag, at denne liste er lineært uafhængig. Er listen
$$(v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_4, 2v_3 + v_4)$$
lineært afhængig eller lineært uafhængig? Svaret skal begrundes!

2. Der er givet en liste af vektorer (v_1, v_2, v_3, v_4) i et vektorrum V. Antag, at denne liste er lineært uafhængig. Er listen
$$(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_3 + v_1)$$
lineært afhængig eller lineært uafhængig? Svaret skal begrundes!

3. Der er givet en liste af vektorer (v_1, v_2, v_3, v_4) i et vektorrum V. Antag, at denne liste er lineært uafhængig. Er listen
$$(v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_3 + v_4, v_3 - v_4)$$
lineært afhængig eller lineært uafhængig? Svaret skal begrundes!

4. Der er givet et vektorrum V med $\dim V = 4$. Der er endvidere givet en liste med syv vektorer fra V,
$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7).$$
Vektorerne er indbyrdes forskellige: $v_i \neq v_j$ for $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, 7$. Vektorerne (v_1, v_2, v_3, v_4) er lineært uafhængige, og vektorerne (v_5, v_6, v_7) er lineært afhængige. Nedenfor er en række udsagn vedrørende disse vektorer. For hvert udsagn skal man begrunde en af følgende muligheder: (i) udsagnet er altid sandt, (ii) udsagnet er altid falsk, eller (iii) med de givne oplysninger kan man ikke afgøre, om udsagnet er sandt eller falsk.

   (a) Listen (v_1, v_2, v_6, v_7) er lineært uafhængig.

   (b) Listen $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ er lineært uafhængig.

   (c) Listen (v_1, v_2, v_4) er lineært uafhængig.

   (d) Listen (v_1, v_5, v_6, v_7) er lineært uafhængig.

5. Der er givet to lineære operatorer $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Vi antager, at begge operatorer er invertible. For hver af nedenstående operatorer skal man afgøre, om den altid er invertibel eller ej. I det første tilfælde skal man begrunde invertibilitet og angive den inverse. I den andet tilfælde skal man give et modeksempel på invertibilitet.

   (a) ST^{-1}

   (b) $S^{-1} - T^{-1}$

   (c) S^2T

(d) $ST^{-1}S$

6. Der er givet to vektorrum V og W med $\dim V = n$ og $\dim W = m$. Der er også givet en lineær afbilding $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Der gælder, at T ikke er surjektiv, og at $\dim \operatorname{range}(T) = 3$. Baseret på disse oplysninger skal følgende spørgsmål besvares. Der skal gives en begrundelse for hvert svar.

   (a) Hvad er den mindste værdi, som m kan have?

   (b) Hvad er den mindste værdi, som n kan have?

   (c) For hvilke værdier af n gælder, at T er injektiv?

7. Der er givet to vektorrum V og W med $\dim V = n$ og $\dim W = 4$. Der er også givet en lineær afbilding $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Der gælder, at T er surjektiv. Baseret på disse oplysninger skal følgende spørgsmål besvares. Der skal gives en begrundelse for hvert svar.

   (a) Hvad er den mindste værdi, som n kan have?

   (b) Hvad er den største værdi, som n kan have?

   (c) For hvilke værdier af n gælder, at T er injektiv?

8. Der er givet to vektorrum V og W med $\dim V = n$ og $\dim W = m$. Der er også givet en lineær afbilding $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Der gælder, at T er injektiv, og at $\dim \operatorname{range}(T) = 7$. Baseret på disse oplysninger skal følgende spørgsmål besvares. Der skal gives en begrundelse for hvert svar.

   (a) Hvad er den mindste værdi, som m kan have?

   (b) Hvad er den største værdi, som m kan have?

   (c) Hvad kan man sige om n?