Matematik 2
Reelle og komplekse funktioner

Skriftlig eksamen
30. august 2004

Dato: 30. august 2004

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.). Lommeregner og bærbar computer må også medbringes. Bemærk dog, at det ikke er tilladt at benytte netforbindelser i eksamenslokalet, herunder kabler, trådløs, infrarød, bluetooth osv.

Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet findes på de 2 næste sider.

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker og potensrækker.

1. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

er konvergent, og beregn dens sum.

2. Beregn konvergensradius for hver af de to potensrækker

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2)x^n$$

og

$$\sum_{n=0}^{\infty}3^{-2n}x^n.$$

3. Bestem konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n^2+2)+3^{-2n}\right]x^n.$$

Vink: Brug resultatet fra spørgsmål 2.

Opgave 2. Denne opgave omhandler funktionsrækker. Der er givet den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}\cos(nx).$$

1. Vis at denne række er absolut og uniformt konvergent på hele $\mathbf{R}$.

2. Summen af denne række betegnes med $g(x)$. Vis, at $g(x)$ er kontinuert differentiabel på $\mathbf{R}$, og at der gælder

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-n}{n^3+1}\sin(nx).$$

Opgave 3. Lad $V=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. En afbildning $f\colon V\to\mathbf{R}^2$ er givet ved

$$f(x,y)=\left(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

1. Gør rede for, at f er differentiabel på V.

2. Beregn Jacobimatricen for f, for alle $(x, y) \in V$.

3. f kan også opfattes som en afbildning fra $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ til $\mathbf{C}$, altså som en kompleks funktion. Vis, at f er differentiabel på $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ i den komplekse forstand, ved at bruge Cauchy-Riemann ligningerne.

Opgave 4. En kompleks funktion h er givet ved udtrykket

$$h(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 2}.$$

1. Vis, at h er meromorf på $\mathbf{C}$ med simple poler i $z_1 = 1 + i$ og $z_2 = 1 - i$.

2. Beregn residuet af h i de to poler.

3. Lad γ betegne den vej, der består af cirklen med centrum i $-i$ og radius $r = 2$, gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Beregn kurveintegralet

$$\int_\gamma h(z)\, dz.$$

4. Beregn integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\, dx$$

ved brug af residueregning.