Matematik 2
Matematisk Analyse 2

Skriftlig eksamen
2010

Dato: 16. juni 2010
Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00
Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer.
Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 2 sider.

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

(a) Find konvergensradius R for rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$$

Lad $f(x)$ være givet ved rækken ovenfor for $|x| < R$. Find potensrækken for $f'(x)$.

(b) Afgør, om rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}} \quad \text{AJ: Fejl, sum skal være fra } n=1$$

er konvergent eller divergent.

(c) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

er konvergent. Vis, at summen er $\frac{1}{2}$.

(d) Vis, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx) \quad \text{AJ: Fejl, sum skal være fra } n=1$$

konvergerer uniformt og absolut på hele den reelle akse.

Opgave 2. Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

(a) Gør rede for, at f er C^1.

(b) Vis, at der for hvert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ findes en åben omegn U om (x_0, y_0), en åben omegn V om $f(x_0, y_0)$ og en afbildning $g : V \to U$, så $f(g(u,v)) = (u,v)$ for alle $(u,v) \in V$ og $g(f(x,y)) = (x,y)$ for alle $(x,y) \in U$.

(c) Bestem Jacobimatricen $Dg(u,v)$ for $(u,v) = f(1, \pi/2)$ og dernæst for alle (u,v) i $f(\mathbb{R}^2)$.

(d) Vis, at f hverken er injektiv eller surjektiv.

Opgave 3. Givet $n \in \mathbf{N}$. Vis ved hjælp af residueregning, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Vink: Skulle kombinatorikken drille, kan man eventuelt først bevise formlen for $n = 2$ og derefter generalisere.

Opgave 4. I denne opgave undersøges de to funktioner givet ved

$$f(z) = \frac{z\cos(z)}{\sin(z)} \text{ og } g(z) = \frac{1}{z} - \frac{\sin(z)}{\cos(z)} - \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

(a) Gør rede for, at f og g er meromorfe funktioner. Vis, at f har en hævelig singularitet i $z_0 = 0$ og beregn $\lim_{z\to 0} f(z)$.

(b) Bestem alle rødder og poler for funktionen f samt deres orden.

(c) Givet $n \in \mathbf{N}$ og et reelt tal r med $(n-1)\frac{\pi}{2} < r < n\frac{\pi}{2}$.
Beregn kurveintegralet $\oint_{\partial B(0,r)} g(z)dz$ over en cirkel med radius r om Origo, som gennemløbes en gang med positiv orientering.
Vink: Man kan begynde med at eftervise, at f løser differentialligningen
$y' = gy$.