Matematik 2
Matematisk Analyse 2
Skriftlig eksamen

Dato: 24. august 2009
Tidspunkt: Kl. 09:30–13:30
Sted: Lokale G5-109

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 2 sider.

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

(a) Afgør, om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{1+e^{-n}}$$

er konvergent eller divergent.

(b) Afgør, om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{2n^2+\sin(n)}$$

er konvergent eller divergent.

(c) Bestem konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}x^n.$$

Gør rede for, at for $x = -\dfrac{1}{8}$ er summen af denne potensrække lig $\dfrac{2}{3}$.

Opgave 2. Der er givet en funktion $F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ ved

$$F(u,v,x,y) = (xy+uv, xu+yv).$$

Der er også givet et punkt

$$(u_0,v_0,x_0,y_0) = (1,1,1,-1) \quad \text{i } \mathbf{R}^4.$$

(a) Vis, at $F(u_0,v_0,x_0,y_0) = (0,0)$.

(b) Vis, at der findes en åben mængde $W \subseteq \mathbf{R}^2$ med $(x_0,y_0) \in W$ og en kontinuert differentiabel funktion $g\colon W \to \mathbf{R}^2$, således at $g(x_0,y_0) = (u_0,v_0)$, og således at $F(g(x,y),x,y) = (0,0)$ for alle $(x,y) \in W$.

(c) Vi skriver $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$. Find de fire partielle afledede

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(1,-1), \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,-1),$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(1,-1), \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,-1).$$

Opgave 3. Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+16}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

ved hjælp af residueregning.

Opgave 4. Der er givet en kompleks funktion ved

$$h(z) = \frac{1}{z^2 + (1-2i)z - 2i}.$$

(a) Vis, at $h(z)$ er en meromorf funktion med simple poler i $z = -1$ og $z = 2i$.

(b) Bestem residuet i de to poler.

(c) Hvad er konvergensradius for potensrækkeudviklingen af $h(z)$ med udviklingspunkt $z_0 = 2$?

(d) Bestem potensrækkeudviklingen af $h(z)$ med udviklingspunkt $z_0 = 2$.
Vink: Man kan starte med at eftervise, at der gælder

$$h(z) = (\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{5}i)\Big(\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+1}\Big).$$