Mat2
Matematisk Analyse 2

Skriftlig eksamen
9. juni 2008

Dato: 9. juni 2008

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet: Findes på de næste 2 (to) sider.

English: An English version is available on pp. 3–4.

Opgave 1. Vi definerer funktionen

$$h(z) = \frac{(z^2-1)}{(z^2+1)(z^2-2z+2)}\,.$$

1. Bestem singulariteterne for h og deres type (hævelige, poler, essentielle). Bestem ordenen af eventuelle poler, og afgør, om h er en meromorf funktion på $\mathbb{C}$.

2. Bestem nulpunkterne for h og deres orden.

3. Lad γ betegne den vej, som består i at gennemløbe cirklen $|z-\frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$ én gang i positiv omløbsretning. Beregn $\int_\gamma h(z)\,dz$.

4. Udregn
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}\,dx\,.$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

1. Afgør, om den uendelige række
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - e^{-n}}$$
er konvergent eller divergent. Svaret skal begrundes.

2. Vis, at rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{1}{3}\Big)^{3n} e^n$$
er absolut konvergent. Find summen af denne uendelige række.

3. Er den uendelige række
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
konvergent eller divergent? Svaret skal begrundes.

4. Beregn konvergensradius for potensrækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n x^n\,.$$

Opgave 3. Denne opgave omhandler funktionsrækker. Der er givet den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n(x-1)} .$$

1. Vis, at denne række er absolut og uniformt konvergent på $(-\infty, 0]$.

2. Summen af denne række betegnes med $g(x)$. Vis, at funktionen $g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ er kontinuert differentiabel, og at der gælder

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{n(x-1)} .$$

Opgave 4. En afbildning $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved udtrykket

$$f(x, y) = \big((e^y + e^{-y}) \cos x, (e^{-y} - e^y) \sin x \big) .$$

1. Gør rede for, at f er differentiabel på $\mathbb{R}^2$.

2. Find Jacobi-matricen $Df(x, y)$ og Jacobi-determinanten $\Delta_f(x, y)$ for alle punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vis, at $\Delta_f(x, y) \neq 0$ når $y \neq 0$.

3. Gør rede for, at til ethvert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ med $y_0 \neq 0$ findes en åben mængde U, med $(x_0, y_0) \in U$, således at f er injektiv på U. Gør rede for, at den inverse funktion $f^{-1} : f(U) \to U$ er differentiabel.

4. Funktionen f kan opfattes som en kompleks funktion fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$. Vis, at f er holomorf på $\mathbb{C}$, ved at bruge Cauchy-Riemann ligningerne.

English Version

Problem 1. We define the function

$$h(z) = \frac{(z^2-1)}{(z^2+1)(z^2-2z+2)} \,.$$

1. Determine the singularities of h and their type (removable, poles, essential). If there are poles, find their order, and determine whether h is a meromorphic function on $\mathbb{C}$.
2. Find the zeros of h and their multiplicity (order).
3. Let γ be the circuit consisting of traversing the circle $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$ once following the positive orientation. Compute $\int_\gamma h(z)\,dz$.
4. Compute
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}\,dx \,.$$

Problem 2. This problem is about infinite series.

1. Determine whether the series
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - e^{-n}}$$
is convergent or divergent. Justify your answer.
2. Show that the series
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{3n} e^n$$
is absolutely convergent. Find the sum of this infinite series.
3. Is the infinite series
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
convergent or divergent? Justify your answer.
4. Compute the radius of convergence of the power series
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n x^n \,.$$

Problem 3. This problem is about infinite series of functions. Given is the infinite series

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n(x-1)} .$$

1. Prove that this series is absolute and uniformly convergent on $(-\infty, 0]$.

2. We denote the sum of this series by $g(x)$. Prove that the function $g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ is continuously differentiable, and that

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{n(x-1)} .$$

Problem 4. Given a mapping $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ by the expression

$$f(x,y) = \big((e^y + e^{-y})\cos x, (e^{-y} - e^y)\sin x\big) .$$

1. Show that f is differentiable on $\mathbb{R}^2$.

2. Find the Jacobi-matrix $Df(x,y)$ and the Jacobi-determinant $\Delta_f(x,y)$ for all points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Show that $\Delta_f(x,y) \neq 0$ when $y \neq 0$.

3. Show that for every $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ with $y_0 \neq 0$ there exists an open set U, with $(x_0, y_0) \in U$, such that f is injective on U. Show that the inverse function $f^{-1} : f(U) \to U$ is differentiable.

4. The function f can be thought of as a complex function from $\mathbb{C}$ to $\mathbb{C}$. Prove that f is a holomorphic function on $\mathbb{C}$, by using the Cauchy-Riemann equations.