Matematik 2
Reelle og komplekse funktioner

Skriftlig eksamen
10. juni 2004

Dato: 10. juni 2004

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.). Lommeregner og bærbar computer må også medbringes. Bemærk dog, at det ikke er tilladt at benytte netforbindelser i eksamenslokalet, herunder kabler, trådløs, infrarød, bluetooth osv.

Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet findes på de 2 næste sider.

Opgave 1. Der er givet funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 27}.$$

1. Gør rede for, at f er holomorf i $\mathbf{C} \setminus \{z \mid z^3 + 27 = 0\}$.
2. Bestem de tre løsninger til $z^3 + 27 = 0$.
3. Hvad er konvergensradius for potensrækkeudviklingen af f omkring punktet $z_0 = 0$?
4. Bestem koefficienterne i potensrækkeudviklingen af f omkring $z_0 = 0$.

Opgave 2. Denne opgave omhandler følger af reelle tal og funktioner.

1. Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ være en reel talfølge. Antag, at $a_n \to a$ for $n \to \infty$. Vis, at der findes en konstant $M > 0$, så at $|a_n| \leq M$ for alle $n \in \mathbf{N}$.
2. Antag, at $f_n \colon I \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, er funktioner defineret på et åbent interval I. Antag at rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$
konverger punktvis og absolut for ethvert $x \in I$. Lad $\ell \in \mathbf{N}$ være et positivt heltal. Vis, at rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x))^{\ell} \tag{2}$$
konvergerer punktvis og absolut for ethvert $x \in I$.
3. Antag nu yderligere, at rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$
konvergerer uniformt på I. Vis, at så konvergerer rækken i (2) også uniformt på I for ethvert $\ell \in \mathbf{N}$.

Opgave 3. Der er givet et ligningssystem

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 + uv &= 2, \\ xu + yv + u^2 &= -1. \end{aligned} \tag{3}$$

i de fire variable (x, y, u, v). Der er også givet et punkt

$$(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, -1, 0, 1).$$

1. Vis, at (x_0, y_0, u_0, v_0) opfylder ligningssystemet givet i (3).

2. Vis, at der findes kontinuert differentiable funktioner $f(x,y)$ og $g(x,y)$, defineret i en kugle $B_r(x_0,y_0)$ omkring (x_0,y_0), således at $f(x_0,y_0)=u_0$, og $g(x_0,y_0)=v_0$, og således at

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 + f(x,y)g(x,y) &= 2, \\ xf(x,y) + yg(x,y) + f(x,y)^2 &= -1 \end{aligned} \tag{4}$$

for alle $(x,y) \in B_r(x_0,y_0)$.

3. Bestem
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Opgave 4. En kompleks funktion $f\colon \mathbf{C}\setminus\{i,-i\} \to \mathbf{C}$ er givet ved udtrykket

$$f(z) = \frac{(z+1)^2}{z^2+1}.$$

1. Vis, at f er en meromorf funktion med simple poler i i og $-i$.

2. Beregn residuet af f i de to poler.

3. Bestem nulpunkterne for f og deres multiplicitet.

4. Lad γ betegne cirklen, gennemløbet én gang i positiv omløbsretning, givet ved $\{z \in \mathbf{C} \mid |z-i+1| = \sqrt{2}\}$. Tegn cirklen i den komplekse plan, og beregn derefter kurveintegralet
$$\int_\gamma f(z)dz.$$

5. γ betegner samme vej som i foregående spørgsmål. Beregn kurveintegralet
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$