

Mat2 og MatØk4 Matematisk Analyse 2

Skriftlig eksamen
7. juni 2011

Dato: 7. juni 2011

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet: Findes på de næste 2 (to) sider.

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

1. Er den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$$

konvergent eller divergent? Svaret skal begrundes.

2. Er den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

konvergent eller divergent? Svaret skal begrundes.

3. Er den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

konvergent eller divergent? Svaret skal begrundes.

Opgave 2. Sæt $\mathcal{O} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. Funktionen $\mathbf{F}: \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}^2$ er givet ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{y}}, y\sqrt{x}\right), \quad (x, y) \in \mathcal{O}.$$

1. Bestem Jacobimatricen og Jacobideterminanten af $\mathbf{F}$.
2. Vis, at $\mathbf{F}$ er injektiv på $\mathcal{O}$, og at $\mathbf{F}$ afbilder $\mathcal{O}$ på $\mathcal{O}$, altså at $\mathbf{F}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$.
3. Bestem den inverse afbildning $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}$, og bestem derefter Jacobimatrix og Jacobi-determinant af $\mathbf{G}$.

Opgave 3. Vi definerer funktionen

$$h(z) = \frac{\sin(z) - \sin(2z)}{z(z^2 - \frac{\pi^2}{4})}$$

1. Gør rede for, at h er meromorf på $\mathbf{C}$.
2. Vis, at $z = 0$ er en hævelig singularitet for $h(z)$.
3. Bestem polerne for $h(z)$, deres orden, og residuet i hver af polerne.
4. Lad $\partial B(1, 1)$ betegne cirklen med centrum i punktet 1 og radius 1, gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Bestem

$$\int_{\partial B(1,1)} h(z) dz.$$

Opgave 4. Vi sætter $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

1. Bestem potensrækkeudviklingen med udviklingspunkt $z_0 = -1$ af den holomorfe funktion $f(z)$. Hvad er dens konvergensradius?
2. Vi sætter nu $g(z) = \frac{1}{z^2}$. Bestem potensrækkeudviklingen med udviklingspunkt $z_0 = -1$ af $g(z)$. Hvad er dens konvergensradius?
3. Vi sætter

$$h(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Bestem potensrækkeudviklingen med udviklingspunkt $z_0 = -1$ af $h(z)$. Hvad er dens konvergensradius?

4. Lad $\partial B(-1, \frac{3}{4})$ betegne cirklen med centrum i -1 og radius $\frac{3}{4}$, gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Bestem

$$\int_{\partial B(-1, \frac{3}{4})} \frac{h'(z)}{h(z)} dz.$$