Matematik 2
Reelle og komplekse funktioner

Prøveeksamen
maj/juni 2004

Dato: ??. juni 2004

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G?-???

Tilladte hjælpemidler Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.). Lommeregner og bærbar computer må også medbringes. Bemærk dog, at det ikke er tilladt at benytte netforbindelser i eksamenslokalet, herunder kabler, trådløs, infrarød, bluetooth osv.

Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet findes på de 2 næste sider.

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

1. Afgør, om den uendelige række
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+n^2+2}.$$
er konvergent eller divergent

2. Afgør, om den uendelige række
$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$$
er konvergent eller divergent.

3. Vis, at den uendelige række
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$
er konvergent, og bestem dens sum.

4. Vis, at konvergensradius for potensrækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{3n}$$
er $\rho = 1$. Bestem et udtryk for summen for alle $|x| < 1$.

Opgave 2. Antag, at $I \subseteq \mathbf{R}$ er et åbent interval, og at f_n, $n \in \mathbf{N}$ og f er kontinuerte reelle funktioner, defineret på I. Antag, at $f_n \to f$ for $n \to \infty$ punktvis på I.

1. Vis, at $(f_n(x))^2 \to (f(x))^2$ for $n \to \infty$ punktvis på I.

2. Antag, at der findes et $C > 0$, således at $|f_n(x)| \leq C$ for alle $x \in I$ og alle $n \in \mathbf{N}$. Antag også, at $f_n \to f$ for $n \to \infty$ uniformt på I. Vis, at $(f_n(x))^2 \to (f(x))^2$ for $n \to \infty$ uniformt på I. *Vink*: For alle reelle tal a og b gælder, at $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

3. I det sidste spørgsmål ser vi på et konkret eksempel. Vi sætter
$$g_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad \text{for } x \in I = \mathbf{R} \text{ og } n \in \mathbf{N},$$
og $g(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$. Vis, at $g_n(x) \to g(x)$ for $n \to \infty$ uniformt på $\mathbf{R}$. Vis også, at i dette tilfælde konvergerer $(g_n(x))^2$ ikke uniformt mod $(g(x))^2$ på $\mathbf{R}$.

Opgave 3. Lad $V = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$. En afbildning $f\colon V \to \mathbf{R}^2$ er givet ved

$$f(x,y) = (x + \frac{1}{y}, x - \frac{1}{y}).$$

1. Beregn Jacobimatricen $Df(x,y)$, og Jacobideterminanten $\Delta_f(x,y)$, for alle $(x,y) \in V$.
2. Vis, at f er injektiv på V. Bestem billedmængden for V, og bestem eksplicit udtrykket for den inverse afbildning f^{-1}.
3. Beregn Jacobimatricen $D(f^{-1})(u,v)$ for alle $(u,v) \in f(V)$.

Opgave 4. Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

ved at bruge residueregning.