

Matematik 2
Matematisk Analyse 2
Skriftlig prøve-eksamen
2009

Dato: 5. juni 2009

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-109

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 2 sider.

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

- (a) Afgør, om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

er konvergent eller divergent.

- (b) Afgør, om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

er konvergent eller divergent.

- (c) Afgør, om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

er konvergent eller divergent.

- (d) Bestem konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n.$$

Opgave 2. Der er givet en funktionsrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n.$$

- (a) Gør rede for, at denne række er punktvis konvergent for alle x , der opfylder $\frac{1}{2} < x < \infty$.

Vink: Det kan være en hjælp at tegne grafen for funktionen $y = 1 - \frac{1}{x}$.

- (b) Vis, at der gælder

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n.$$

for alle x , der opfylder $\frac{1}{2} < x < \infty$.

- (c) Vis, at for alle a og b , der opfylder $\frac{1}{2} < a < b < \infty$ gælder, at rækken er *uniformt konvergent* på intervallet $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$.

Opgave 3. Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{6}$$

ved hjælp af residueregning.

Opgave 4. Der er givet en kompleks funktion

$$h(z) = \frac{\cos(z)}{e^{2z} + 1}.$$

- (a) Find de isolerede singulariteter af $h(z)$. For hver singularitet skal det afgøres, om denne singularitet er hævelig, er en pol, eller er en væsentlig singularitet (også kaldet en essentiel singularitet).
- (b) Hvis $h(z)$ har poler, skal man bestemme deres orden, og beregne residuet i hver pol.
- (c) Afgør, om $h(z)$ har nogen nulpunkter. I bekræftende fald bestemmes multiplicitet af hvert enkelt nulpunkt.
- (d) Beregn integralet

$$\int_{\partial B(i\pi, \pi)} \frac{h'(z)}{h(z)} dz,$$

hvor vejen $\partial B(i\pi, \pi)$ er cirklen med centrum i $i\pi$ og radius π , gennemløbet én gang i positiv omløbsretning.