Matematik 2
Matematisk Analyse 2

Skriftlig eksamen
2010

Dato: 26. august 2010
Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00
Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer.
Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 2 sider.

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

(a) Vis, at

$$\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

konvergerer. Afgør, om rækken konvergerer absolut.

(b) Find konvergensradius R for rækken

$$\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+1}x^n$$

Lad $f(x)$ være givet ved rækken ovenfor, når $|x| < R$. Bestem en potensrække for $f'(x)$.

(c) Find konvergensradius R for rækken

$$\Sigma_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n x^n$$

Udregn summen for $x = 2$.
Lad $g(x)$ være givet ved rækken ovenfor, når $|x| < R$. Afgør, om g er kontinuert i $x = 2$.

Opgave 2. Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x,y) = (x - \frac{(x+y)^2}{4}, \frac{x+y}{2})$$

(a) Gør rede for, at f er C^1.

(b) Vis, at der for hvert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ findes en åben omegn U om (x_0, y_0), en åben omegn V om $f(x_0, y_0)$ og en afbildning $g : V \to U$, så $f(g(u,v)) = (u,v)$ for alle $(u,v) \in V$ og $g(f(x,y)) = (x,y)$ for alle $(x,y) \in U$.

(c) Udregn Jacobimatricen for g i punktet $(u,v) = f(3,1)$. Vis, at Jacobimatricen for g i et punkt (u,v) er

$$\begin{pmatrix} 1 & 2v \\ -1 & 2-2v \end{pmatrix}$$

(d) Vis, at $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ både er injektiv og surjektiv.

Opgave 3. Givet de to polynomier $g(z) = z^2 + z + 1$ og $h(z) = z^4 + z^2 + 1$ og den meromorfe funktion $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$.

(a) Bestem for hver af funktionerne g og h rødderne samt deres orden.

(b) Vis at funktionen f har hævelige singulariteter i to af rødderne for h og simple poler i de to resterende.

(c) Reducer funktionsudtrykket for $f(z)$.

(d) Eftervis at residuerne for funktionen f i de to simple poler antager værdierne $\pm\frac{i\sqrt{3}}{3}$.

Opgave 4. Givet den meromorfe funktion $f(z)$ fra Opgave 3.

(a) Lad B betegne en cirkel i den komplekse plan hvis rand ∂B ikke indeholder nogen af de to poler for funktionen f. Beregn kurveintegralet

$$\oint_{\partial B} f(z)dz$$

i de tilfælde hvor Bs indre indeholder ingen, henholdsvis en eller begge poler.

(b) Beregn det reelle uegentlige integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

ved hjælp af residueregning.