

Matematik 4
Komplekse funktioner
Skriftlig prøveeksamen
juni 2012
med svar

Dato: juni 2012

Varighed: 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet: Findes på de næste sider, med korte svar indsat. Med forbehold for fejl!

Opgave 1. 1. Lad Γ betegne den vej, der består af randen af rektanglet med hjørner

$$\frac{\pi}{2} + i, -\frac{\pi}{2} + i, -\frac{\pi}{2} - i, \frac{\pi}{2} - i$$

gennemløbet én gang i positiv omløbsretning.

(a) Skitsér vejen i den komplekse plan.

Skitse udelades her.

(b) Vis, at

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\sin(z)} dz = 2\pi i.$$

Funktionen $\frac{1}{\sin(z)}$ er meromorf i den komplekse plan med simple poler i punkterne πk , $k \in \mathbf{Z}$. Den eneste pol indenfor vejen Γ er $z = 0$. Residuet i denne pol er

$$R\left[\frac{1}{\sin(z)}, 0\right] = \left.\frac{1}{\cos(z)}\right|_{z=0} = 1.$$

Resultatet følger nu af residuesætningen.

2. Lad γ betegne den vej, der består af liniestykket fra $\frac{\pi}{2} + i$ til $-\frac{\pi}{2} + i$, gennemløbet med begyndelsespunkt $\frac{\pi}{2} + i$ og endepunkt $-\frac{\pi}{2} + i$.

(a) Skitsér vejen i den komplekse plan.

Skitse udelades her.

(b) Vis, at

$$\int_{\gamma} \sin(z) dz = i(e^{-1} - e).$$

Sæt $f(z) = \sin(z)$. Så er $F(z) = -\cos(z)$ en stamfunktion for $f(z)$. Begge

funktioner er defineret i hele den komplekse plan. Teorien giver da, at

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \sin(z) dz &= F(-\frac{\pi}{2} + i) - F(\frac{\pi}{2} + i) \\
 &= \cos(\frac{\pi}{2} + i) - \cos(-\frac{\pi}{2} + i) \\
 &= \frac{1}{2}(e^{i(\frac{\pi}{2}+i)} + e^{-i(\frac{\pi}{2}+i)}) - \frac{1}{2}(e^{i(-\frac{\pi}{2}+i)} + e^{-i(-\frac{\pi}{2}+i)}) \\
 &= \frac{i}{2}(e^{-1} - e^1) - \frac{i}{2}(-e^{-1} + e^1) \\
 &= i(e^{-1} - e).
 \end{aligned}$$

Undervejs er brugt, at $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ og $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Opgave 2. Vis ved hjælp af residueregning, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{3\pi e^{-2}}{16}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 4)^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

Funktionen $\frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)^2}$ har en pol af orden 2 i punktet $2i$ i den øvre halvplan, og en pol af orden 2 i punktet $-2i$ i den nedre halvplan. Vi bruger sætningen fra bogen vedr. dette integral (Theorem 33.1).

Vi skal beregne residuet i polen $2i$. Vi har

$$\begin{aligned}
 R[\frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)^2}, 2i] &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left((z - 2i)^2 \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)^2} \right) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z + 2i)^2} \right) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{ie^{iz}}{(z + 2i)^2} - \frac{2e^{iz}}{(z + 2i)^3} \right) \\
 &= -i \frac{3e^{-2}}{32}.
 \end{aligned}$$

Vi mangler nu at verificere vurderingen langs en halvcirkel i den øvre halvplan. Vi tager $\gamma(t) = Re^{it}$, $R > 2$, $t \in [0, \pi]$.

$$\left| \frac{e^{iRe^{it}}}{(R^2 e^{2it} + 4)^2} \right| \leq \frac{e^{-R \sin(t)}}{(R^2 - 4)^2} \leq \frac{1}{(R^2 - 4)^2}.$$

Heraf ses, at

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, \pi]} \left| R \frac{e^{iRe^{it}}}{(R^2 e^{2it} + 4)^2} \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{(R^2 - 4)^2} = 0.$$

Vi kan derfor bruge resultatet fra bogen til at konkludere, at

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4)^2} dx = \operatorname{Re} \left(2\pi i (-i) \frac{3e^{-2}}{32} \right) = \frac{3\pi e^{-2}}{16}.$$

Man kan også anvende Corollary 33.1 i stedet for vurderingen ovenfor.

Opgave 3. Vi definerer funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 9}$$

1. Gør rede for, at $f(z)$ er analytisk på $\mathbf{C} \setminus \{-3, 3\}$, og at $f(z)$ har simple poler i -3 og 3 .

$z^2 - 9$ er analytisk i hele den komplekse plan, med simple nulpunkter i -3 og 3 . Heraf følger resultaterne.

2. Bestem potensrækkeudviklingen for $f(z)$ med udviklingspunkt $z_0 = 0$. Bestem konvergensradius for denne potensrække.

Konvergensradius er givet ved mindste afstand fra 0 til singulariteterne. Den er 3, så konvergensradius er $\rho = 3$. For $|z| < 3$ har vi

$$\frac{1}{z^2 - 9} = -\frac{1}{9} \frac{1}{1 - (\frac{z}{3})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{9^{n+1}} z^{2n}.$$

3. Vis, at

$$f(z) = \frac{1}{6} \frac{1}{z - 3} - \frac{1}{6} \frac{1}{z + 3}.$$

Udregn højre side og se efter at den er lig med venstre side. Detaljer udelades her, men hører med til en besvarelse.

4. Bestem Laurenttrækkeudviklingen for $f(z)$ på ringområdet $\{z \mid 0 < |z - 3| < 6\}$.

Vi bruger resultatet fra foregående spørgsmål. Første led har den rigtige form. Andet led er analytisk i det givne ringområde. Vi omskriver for at finde potensrækkeudviklingen om 3.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6} \frac{1}{z+3} &= -\frac{1}{6} \frac{1}{z-3+6} = -\frac{1}{6^2} \frac{1}{1 + \frac{z-3}{6}} \\ &= -\frac{1}{6^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-3}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{6^{n+2}} (z-3)^n. \end{aligned}$$

Vi adderer det første led ovenfor og skriver resultatet som

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{6^{n+2}} (z-3)^n.$$

Opgave 4. Vi definerer funktionen

$$h(z) = \frac{(z^3 + 1)^2}{(z^2 + 1)}$$

1. Gør rede for, at $h(z)$ er meromorf på $\mathbf{C}$.

h er kvotienten af to polynomier, er derfor en rational funktion, som er et specialtilfælde af en meromorf funktion.

2. Bestem nulpunkterne for $h(z)$ og deres multiplicitet.

$(z^3 + 1)^2 = 0$ har løsningerne -1 , $e^{i\pi/3}$ og $e^{-i\pi/3}$. De er simple nulpunkter for $z^3 + 1$, således at alle tre nulpunkter for $(z^3 + 1)^2$ har multiplicitet 2. Bemærk, at ingen af de tre fundne nulpunkter er nulpunkter for nævneren.

3. Bestem polerne for $h(z)$, deres orden, og residuet i hver pol.

$z^2 + 1 = 0$ har løsningerne i og $-i$. Ingen af disse er nulpunkter for tælleren, så de er simple poler. Vi beregner residuerne:

$$R[h, i] = \frac{(z^3 + 1)^2}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{(i^3 + 1)^2}{2i} = -1.$$

$$R[h, -i] = \frac{(z^3 + 1)^2}{2z} \Big|_{z=-i} = \frac{((-i)^3 + 1)^2}{-2i} = -1.$$

4. Har funktionen $h(z)$ nogen hævelige singulariteter?
-

Nej, nulpunkterne for nævneren er ikke nulpunkter for tælleren.

5. Lad γ betegne den vej, der er givet ved cirklen $|z - 1| = \frac{5}{4}$, gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Beregn

$$\int_{\gamma} h(z) dz.$$

De to poler for h ligger begge udenfor γ . Det følger af, at $|i - 1| = \sqrt{2} > \frac{5}{4}$ og $|-i - 1| = \sqrt{2} > \frac{5}{4}$.

Vi kan bruge Cauchys sætning til at slutte at

$$\int_{\gamma} h(z) dz = 0.$$

6. Lad γ være samme vej som i foregående spørgsmål. Beregn

$$\int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz.$$

Vi bruger resultatet fra Theorem 37.1. Vi har ovenfor set, at polerne ligger udenfor γ . Vi ser på afstanden mellem de tre nulpunkter og 1. Vi har $|-1 - 1| = 2$, $|e^{i\pi/3} - 1| = 1$ og $|e^{-i\pi/3} - 1| = 1$. Derfor ligger $e^{i\pi/3}$ og $e^{-i\pi/3}$ indenfor γ og -1 udenfor γ . Sætningen giver derfor resultatet

$$\int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 2\pi i(2 + 2) = 8\pi i.$$
