

# Matematik 4

## Komplekse funktioner

Skriftlig prøveeksamen  
juni 2012

Dato: juni 2012

Varighed: 4 timer

**Tilladte hjælpemidler:** Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

**Bemærk:** Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

**Eksamenssættet:** Findes på de næste 2 (to) sider.

**Opgave 1.** 1. Lad  $\Gamma$  betegne den vej, der består af randen af rektanglet med hjørner

$$\frac{\pi}{2} + i, -\frac{\pi}{2} + i, -\frac{\pi}{2} - i, \frac{\pi}{2} - i$$

gennemløbet én gang i positiv omløbsretning.

(a) Skitsér vejen i den komplekse plan.

(b) Vis, at

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\sin(z)} dz = 2\pi i.$$

2. Lad  $\gamma$  betegne den vej, der består af liniestykket fra  $\frac{\pi}{2} + i$  til  $-\frac{\pi}{2} + i$ , gennemløbet med begyndelsespunkt  $\frac{\pi}{2} + i$  og endepunkt  $-\frac{\pi}{2} + i$ .

(a) Skitsér vejen i den komplekse plan.

(b) Vis, at

$$\int_{\gamma} \sin(z) dz = i(e - e^{-1}).$$

**Opgave 2.** Vis ved hjælp af residueregning, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{3\pi e^{-2}}{16}.$$

**Opgave 3.** Vi definerer funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 9}$$

1. Gør rede for, at  $f(z)$  er analytisk på  $\mathbf{C} \setminus \{-3, 3\}$ , og at  $f(z)$  har simple poler i  $-3$  og  $3$ .

2. Bestem potensrækkeudviklingen for  $f(z)$  med udviklingspunkt  $z_0 = 0$ . Bestem konvergensradius for denne potensrække.

3. Vis, at

$$f(z) = \frac{1}{6} \frac{1}{z-3} - \frac{1}{6} \frac{1}{z+3}.$$

4. Bestem Laurenttrækkeudviklingen for  $f(z)$  på ringområdet  $\{z \mid 0 < |z-3| < 6\}$ .

**Opgave 4.** Vi definerer funktionen

$$h(z) = \frac{(z^3 + 1)^2}{(z^2 + 1)}$$

1. Gør rede for, at  $h(z)$  er meromorf på  $\mathbf{C}$ .
2. Bestem nulpunkterne for  $h(z)$  og deres multiplicitet.
3. Bestem polerne for  $h(z)$ , deres orden, og residuet i hver pol.
4. Har funktionen  $h(z)$  nogen hævelige singulariteter?
5. Lad  $\gamma$  betegne den vej, der er givet ved cirklen  $|z - 1| = \frac{5}{4}$ , gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Beregn

$$\int_{\gamma} h(z) dz.$$

6. Lad  $\gamma$  være samme vej som i foregående spørgsmål. Beregn

$$\int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz.$$