# Mat3 og MatØk3
# Linearitet og differentiabilitet

## Skriftlig eksamen
## 6. januar 2012

Dato: 6. januar 2012

Tidspunkt: 09:00–13:00

Sted: Fr. Bajers Vej 7G

**Tilladte hjælpemidler:** Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

**Bemærk:** Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

**Eksamenssættet:** Findes på de næste 2 (to) sider.

**Vedr. besvarelsen:** Svar på de enkelte delspørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til lærebog, eller ved en kombination af disse.

**Opgave 1.** Der er givet tre vektorer i $\mathbf{R}^4$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Vis, at $(v_1, v_2, v_3)$ er lineært afhængige.
2. Sæt $U = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$. Find en basis for $U$ og angiv derefter dimensionen af $U$.
3. Find en basis for et underrum $W$ af $\mathbf{R}^4$, således at $\mathbf{R}^4 = U \oplus W$.
4. Find en ortonormal basis for $\mathbf{R}^4$, $(u_1, u_2, u_3, u_4)$, således at $U = \operatorname{span}(u_1, u_2)$ og $W = \operatorname{span}(u_3, u_4)$.

**Opgave 2.** Denne opgave bstår af to dele, der kan besvares uafhængigt af hinanden.

1. Lad $V$ være et endeligdimensional komplekst vektorrum. Lad $S, T \in \mathcal{L}(V, V)$ være to lineære afbildninger. Antag, at $S$ er injektiv, og at $T$ er surjektiv. Besvar følgende spørgsmål. Svarene skal begrundes.
   (a) Er $ST$ altid injektiv?
   (b) Er $ST$ altid surjektiv?
   (c) Er $TS$ altid injektiv?
   (d) Er $TS$ altid surjektiv?
2. $V$ være et endeligdimensional komplekst vektorrum. Lad $A, B \in \mathcal{L}(V, V)$ være to lineære afbildninger. Antag, at $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, er en egenværdi for $AB$ med tilhørende egenvektor $u \in V$, $u \neq 0$.
   (a) Vis, at $Bu \neq 0$.
   (b) Vis, at $Bu$ er en egenvektor for $BA$ med tilhørende egenværdi $\lambda$.
   (c) Vis, at
   $$\begin{aligned} &\{\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \mid \lambda \text{ er en egenværdi for } AB\} \\ &\qquad = \{\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \mid \lambda \text{ er en egenværdi for } BA\}. \end{aligned}$$
   (d) Antag, at $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *ikke* er en egenværdi for $AB$. Vis, at der gælder
   $$(BA - zI)^{-1} = \frac{1}{z}\big(B(AB - zI)^{-1}A - I\big).$$
   *Hint*: Vis, at højre side ovenfor gange $(BA - zI)$ er lig identiteten.

**Opgave 3.** Der er givet en reel $3 \times 3$ matrix

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 3 \\ -9 & -18 & -7 \end{bmatrix}.$$

1. Vis, at $T$ har egenværdierne $-1$ og $2$.
2. Afgør, om $T$ er diagonaliserbar. Hvis den er diagonaliserbar, skal man bestemme en invertibel matrix $P$ og en diagonalmatrix $D$, således at $T = PDP^{-1}$. Hvis den ikke er diagonaliserbar, skal man forklare hvorfor.
3. Er $T$ matricen for en normal lineær afbildning?
4. Er $T$ invertibel?

**Opgave 4.** Sæt

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

Funktionen $F\colon V \to \mathbf{R}^2$ er givet ved

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x} \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \end{bmatrix}.$$

1. Vis, at $F$ er differentiabel på $V$, og find Jacobimatricen for $F$.
2. Sæt

$$g(x, y, z) = \|F(x, y, z)\|^2 = \big(F_1(x, y, z)\big)^2 + \big(F_1(x, y, z)\big)^2$$

   (a) Vis, at $g\colon V \to \mathbf{R}$ er differentiabel.
   
   (b) Vis, at alle punkterne $(t, t, t)$, $t > 0$, er kritiske punkter for $g$. Har $g$ andre kritiske punkter i $V$?
   
   (c) Find Hessematricen for $g$. Kan man bruge den til at afgøre, om de kritiske punkter for $g$ er lokale minima, lokale maxima, eller saddelpunkter?
   
   (d) Vis, at $g$ har et globalt minimum på $V$, og at den ikke har et globalt maksimum på $V$.