

Kursusgang 20, 11. november 2013, 12:30–16:15**Program**

1. 12:30–14:15. Forelæsning i G5-112. Jeg gennemgår resten af resultaterne vedrørende lokale ekstrema og Hessematricen. Se læsevejledning nedenfor.
2. 14:15–16:15. Opgaveregning i grupperne. Se opgavelisten nedenfor.

Opgaver Løs opgaverne i den angivne rækkefølge.

1. Exercise 6.2.12 side 392 i [WFT]. Ignorér opgaveteksten i starten. For hver af de angivne afbildninger i (a), (b), (c) skal I beregne Jacobimatricen (se Supplerende materiale 3) både generelt og i det angivne punkt.
2. Exercise 6.2.13 side 392 i [WFT]. For hver af de angivne afbildninger i (a), (b), (c) skal I beregne Jacobimatricen (se Supplerende materiale 3).
3. Reeksamen marts 2012 opgave 4
4. Reeksamen marts 2012 opgave 3

Bemærk: Dette er den sidste skemalagte kursusgang. Der udestår selvstændigt arbejde svarende til 5 kursusgange (1 ECTS), som ikke er skemalagt. Mit forslag er at bruge tiden på repetition og gennemgang af tidligere løste opgaver. I begyndelsen af januar bliver der lagt et prøveeksamenssæt på kursushjemmesiden. Læst instruktionerne *før* end I åbner sættet.

Læsevejledning til [WFT]: Her er en kort oversigt over de ting I skal koncentrere Jer om at læse og forstå i [WFT].

1. Grænseværdi og kontinuitet for funktioner af flere variable. Disse resultater er specialtilfælde af resultater vedrørende metriske rum i Analyse 1. Læs siderne 302–305, 309–313.
2. Partielle afledede. Læs siderne 316–322, dog Theorem 5.3.3. uden bevis.
3. Differentiable funktioner af flere variable. Siderne 323–330 erstattes af resultaterne i Supplerende materiale 3.
4. Maksima og minima. Læs siderne 334–335.
5. Kædereolen. Siderne 339–344 erstattes af resultaterne i Supplerende materiale 3. Se også forklaring til differentiale notationen nedenfor.
6. Middelværdisætningen for funktioner af flere variable. Siderne 346–348.
7. Højere ordens differentiale og Taylors formel. Siderne 348–351. Se også forklaring til differentiale notationen nedenfor.
8. Tilstrækkelig betingelse for lokale ekstrema. Siderne 352–356.
9. Resultaterne fra Chapter 6 om funktioner $\mathbf{F}: \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{R}^n$ åben, erstattes af resultaterne i Supplerende materiale 3.

Noget om differentier. Jeg vil forsøge at forklare differentiale notationen i [WFT]. Man skal se den som en beskrivelse af lineære afbildninger fra $\mathbf{R}^n$ til $\mathbf{R}$ i form af en linearkombination af simple lineære afbildninger, der kaldes differentier.

Vi definerer $dx_j \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ ved

$$dx_j(\mathbf{x}) = x_j \quad \text{for } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n. \quad (1)$$

Lad os derefter tage en funktion $F: \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{R}$ åben. Lad $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$ og antag at F er total differentiable i $\mathbf{x}_0$. Den totale afledede $DF(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ kan da skrives som

$$DF(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)dx_n. \quad (2)$$

Af definitionerne følger, at for $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ har vi

$$DF(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)dx_1(\mathbf{h}) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)dx_2(\mathbf{h}) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)dx_n(\mathbf{h}) \quad (3)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)h_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)h_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)h_n \quad (4)$$

Bemærk at vi skelner mellem en lineær afbildning som i (2) og dens værdi på en vektor, som i (3) og (4). Relationen mellem notationen for den totale afledede og for differentialen af første orden er da følgende lighedstegn mellem to lineære afbildninger: $DF(\mathbf{x}_0) = d_{\mathbf{x}_0}F$ og tilsvarende mellem værdier på en vektor: $DF(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = d_{\mathbf{x}_0}F(\mathbf{h})$.

Ligningen (2) er den samme som ligning (23) i [WFT], side 326. Se også de andre ligninger og eksemplerne på denne side.

I de højere ordens differentier er det samme notation, idet man udnytter, at man kan tage produkt af to afbildninger fra en delmængde af $\mathbf{R}^n$ til $\mathbf{R}$, således at det giver mening at skrive dx_1dx_2 . Denne afbildning er defineret ved

$$(dx_1dx_2)(\mathbf{h}) = dx_1(\mathbf{h})dx_2(\mathbf{h}) = h_1h_2. \quad (5)$$

Anden ordens differentialen for en funktion F af to variable er da følgende afbildning fra $\mathbf{R}^2$ til $\mathbf{R}$:

$$d_{\mathbf{x}_0}^{(2)}F = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)dx_i dx_j. \quad (6)$$

Værdien på en vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ er da

$$d_{\mathbf{x}_0}^{(2)}F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)x_i x_j. \quad (7)$$

Arne Jensen