

Mat3 og MatØk3

Linearitet og differentiabilitet

Skriftlig prøveeksamen
januar 2014

Dato: januar 2014

Varighed: 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet: Findes på de næste 2 (to) sider.

Vedr. besvarelsen: Svar på de enkelte delspørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til lærebog, eller ved en kombination af disse.

Opgave 1. Der er givet to reelle vektorrum V og W med $\dim V = 3$ og $\dim W = 2$. Der er endvidere givet en basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ for V og en basis $\{f_1, f_2\}$ for W .

En lineær afbildning $T \in \mathcal{L}(V, W)$ er givet ved

$$Te_1 = f_1 - f_2, \quad Te_2 = f_2, \quad Te_3 = 2f_1 + f_2,$$

og en lineær afbildning $S \in \mathcal{L}(W, V)$ er givet ved

$$Sf_1 = 2e_1 + 3e_2 - e_3, \quad Sf_2 = -2e_1 - e_2 + e_3.$$

1. Bestem matricen for T med hensyn til de givne baser.
2. Bestem matricen for S med hensyn til de givne baser.
3. Bestem en basis for $\text{null } T$.
4. Bestem en basis for $\text{range } S$.
5. Bestem matricerne for de to lineære afbildninger $X = ST \in \mathcal{L}(V, V)$ og $Y = TS \in \mathcal{L}(W, W)$ med hensyn til de givne baser.
6. Er X surjektiv? Svaret skal begrundes.
7. Er Y injektiv? Svaret skal begrundes.

Opgave 2. Der er givet en reel 4×4 matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Er matricen A invertibel?
2. Er matricen A normal?
3. Bestem egenværdierne for matricen A .
4. Er A diagonaliserbar? Hvis svaret er ja, så skal man bestemme en invertibel matrix P og en diagonalmatrix D , således at $A = PDP^{-1}$.

Opgave 3. Der er givet et komplekst vektorrum V med indre produkt. Der gælder, at $\dim V = 5$. Der er også givet to lister af vektorer

$$\{u_1, u_2, u_3\} \quad \text{og} \quad \{w_1, w_2\}.$$

Begge lister er ortonormale.

1. Er listen $\{u_1, u_2, u_3\}$ lineært uafhængig? Svaret skal begrundes.
2. Er listen $\{u_1, u_2, w_1\}$ altid ortonormal? Er denne liste altid lineært uafhængig? Svarerne skal begrundes.
3. Er listen $\{u_1, u_2, u_3, w_1, w_2\}$ en basis for V ? Svaret skal begrundes.
4. Er listen

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}w_2, \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}w_2 \right\}$$

ortonormal? Svaret skal begrundes.

Opgave 4. Lad $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > -1\}$. En funktion $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ er givet ved

$$f(x, y) = \frac{xy}{1+x}.$$

1. Vis, at f er differentiabel på M . Angiv Jacobimatricen for f .
2. Vis, at $(0, 0)$ er det eneste kritiske punkt for f .
3. Bestem Hessematricen for f .
4. Brug Hessematricen til at afgøre, om $(0, 0)$ er et lokalt maksimum, et lokalt minimum, eller et sadelpunkt.
5. Gør rede for, at f har både et maksimum og et minimum på rektanglet

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2\}.$$

Bestem maksimumsværdien og minimumsværdien af f på R , og angiv for begge ekstrema alle de punkter hvori ekstrema antages.