## Kædereglen for funktioner af én variabel

Vi giver et bevis for kædereglen, som er nyttigt, når vi skal se på kædereglen for funktioner af flere variable. Fremstillingen her er kortere end den man kan finde i [WFT].

**Lemma.** *Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent interval, og lad $x_0 \in I$. Lad $f\colon I \to \mathbf{R}$ være en funktion. Så gælder, at $f$ er differentiabel i $x_0$ med differentialkvotient $f'(x_0)$, hvis og kun hvis der findes et $a \in \mathbf{R}$ og en funktion $E_{x_0}\colon I \to \mathbf{R}$, således at $\lim_{x\to x_0} E_{x_0}(x) = 0$, og således at*

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + E_{x_0}(x)(x - x_0) \quad \text{for alle } x \in I. \tag{1}$$

*Hvis $f$ er differentiabel i $x_0$, så er $f'(x_0) = a$.*

*Bevis.* Antag først, at $f$ er differentiabel i $x_0$. Definér

$$E_{x_0}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{for } x \in I \setminus \{x_0\}, \\ 0 & \text{for } x = x_0. \end{cases}$$

Definitionen af differentiabilitet medfører, at $\lim_{x\to x_0} E_{x_0}(x) = 0$, og (1) følger af en omskrivning af definitionen af $E_{x_0}(x)$.

Antag nu, at $a$ og $E_{x_0}$ eksisterer, således at (1) er opfyldt. Så har vi for $x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + E_{x_0}(x),$$

og heraf følger

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a,$$

hvilket viser differentiabiliteten i $x_0$ af $f$ og $f'(x_0) = a$. □

Kædereglen kan formuleres på følgende måde.

**Sætning.** *Lad $I$ og $J$ være åbne intervaller. Antag, at $f\colon I \to \mathbf{R}$ er differentiabel i $x_0 \in I$. Sæt $y_0 = f(x_0)$. Antag, at $f(I) \subseteq J$, og at $g\colon J \to \mathbf{R}$ er differentiabel i $y_0$. Så er $h = g \circ f$ differentiabel i $x_0$ og*

$$h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

*Bevis.* Vi bruger Lemmaet ovenfor to gange. Det giver følgende resultat.

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= (x - x_0)\big(f'(x_0) + E_{x_0}(x)\big), \\ g(y) - g(y_0) &= (y - y_0)\big(g'(y_0) + \widetilde{E}_{y_0}(y)\big). \end{aligned} \tag{2}$$

Her gælder $\lim_{x\to x_0} E_{x_0}(x) = 0$ og $\lim_{y\to y_0} \widetilde{E}_{y_0}(y) = 0$. Vi sætter $y = f(x)$ og regner videre på (2).

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) &= \big(f(x) - f(x_0)\big)\big(g'(y_0) + \widetilde{E}_{y_0}(f(x))\big) \\ &= (x - x_0)\big(f'(x_0) + E_{x_0}(x)\big)\big(g'(y_0) + \widetilde{E}_{y_0}(f(x))\big). \end{aligned}$$

Dette udtryk skriver vi som

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \big(f'(x_0) + E_{x_0}(x)\big)\big(g'(y_0) + \widetilde{E}_{y_0}(f(x))\big)$$

Da $f$ differentiabel i $x_0$ medfører, at $f$ er kontinuert i $x_0$, har vi, at $\lim_{x\to x_0} \widetilde{E}_{y_0}(f(x)) = 0$. Heraf følger

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g'(y_0).$$

□

Arne Jensen