

**E-Opgave 1**  
**Stillet 13. marts 2015**  
**Afleveres 23. marts 2015**

**Introduktion**

Opgaven består af et antal delopgaver, der omhandler emner fra det gennemgåede pensum indtil nu. Dette pensum er

Lectures 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Hver gruppe afleverer én samlet skriftlig besvarelse. Denne må gerne være håndskrevet, så længe den er læselig. Der er samtale med hver gruppe om besvarelsen fredag den 27. marts. Tidspunkt oplyses senere.

**Opgaver**

**Opgave 1.** 1. Bestem  $\text{Log}(-\sqrt{3} - i)$ .

2. Bestem alle værdier af  $(1 + i)^{3i}$ .

3. Bestem alle  $z$  der opfylder  $\exp(z) = 2 + 2i$ .

4. Bestem alle  $z$  der opfylder  $\cos(z) = i$ .

**Opgave 2.** 1. En vej i den komplekse plan er givet ved

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right].$$

(a) Skitsér vejen i den komplekse plan.

(b) Vis, at

$$\int_{\gamma} (z - 1) dz = (\sqrt{2} - 1)i.$$

(c) Bestem

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz.$$

2. Lad  $\gamma$  betegne den vej, der består af liniestykket fra  $\frac{\pi}{2} + i$  til  $-\frac{\pi}{2} + i$ , gennemløbet med begyndelsespunkt  $\frac{\pi}{2} + i$  og endepunkt  $-\frac{\pi}{2} + i$ .

(a) Skitsér vejen i den komplekse plan.

(b) Vis, at

$$\int_{\gamma} \sin(z) dz = i(e - e^{-1}).$$

**Opgave 3.** 1. Vis, at der gælder

$$\frac{1}{z^2 + 4} = \frac{i}{4} \frac{1}{z - 2i} - \frac{i}{4} \frac{1}{z + 2i} \quad (1)$$

2. Lad  $\gamma_1$  være cirklen med centrum i 2 og radius  $\frac{5}{2}$ , gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Beregn

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2 + 4} dz.$$

3. Lad  $\gamma_2$  være den vej, der består af randen af trekanten med hjørner i punkterne  $3 + i$ ,  $3i$ , og  $-3 - i$ , gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Beregn

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2 + 4} dz.$$

4. Lad  $\gamma_3$  være den vej, der består af randen af rektanglet med hjørner i punkterne 4,  $4i$ ,  $-4$ , og  $-4i$ , gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Beregn

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z^2 + 4} dz.$$

**Opgave 4.** Lad  $\gamma$  være cirklen med centrum i  $1 + i$  og radius 2, gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Beregn

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{16z^2 - \pi^2} dz. \quad (2)$$