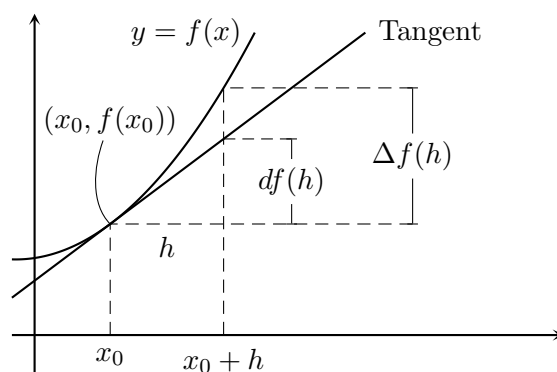


Differentiabilitet

1 Funktioner af én reel variabel

Tilvækstfunktionen Δf med udgangspunkt i x_0 er en reel funktion af tilvæksten h :

$$\Delta f(h) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$



Figur 1: Tangent, tilvækst og differential.

Differentiabilitet i x_0 :

$$f \text{ er differentiable i } x_0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(h)}{h} \text{ eksisterer.}$$

Grænseværdien kaldes differentialkvotienten af f i x_0 og noteres $f'(x_0)$, alternativt df/dx , hvor punktet x_0 er underforstået.

Differentialet af f med udgangspunkt i x_0 er en lineær funktion af tilvæksten h . Som funktionsnavn benyttes df , og funktionsværdien $df(h)$ er lig med $f'(x_0)h$. Betragt vi specielt den identiske afbildning $g(x) = x$, bliver $dg(h) = 1h = h$. Vi kan kort skrive $dg(h) = dg = dx$. Derfor er $h = dx$, og dermed $df = f'(x_0)dx \Rightarrow f'(x_0) = df/dx$.

Differentialkvotienten er altså en kvotient mellem differentialer, i tælleren differentialet af den aktuelle funktion og i nævneren differentialet af den identiske afbildning.

Ækvivalent definition af differentiability:

$$f \text{ differentiable at } x_0 \iff \exists a : \Delta f(h) = ah + \varepsilon(h)h,$$

hvor ε er en såkaldt epsilonfunktion, dvs. en funktion for hvilken der gælder $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Bemærk, at for $h \neq 0$ gælder

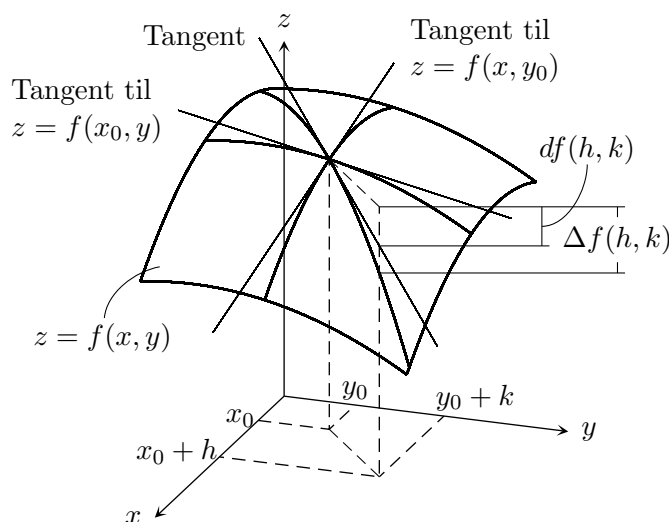
$$\Delta f(h) = ah + \varepsilon(h)h \iff \frac{\Delta f(h)}{h} = a + \varepsilon(h),$$

hvoraf ses, at $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta f(h)/h = a$, dvs. $a = f'(x_0)$.

2 Funktioner af to reelle variable

Tilvækstfunktionen Δf med udgangspunkt i (x_0, y_0) er en reel funktion af tilvæksterne h og k :

$$\Delta f(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0).$$



Figur 2: Tangentplan, tilvækst og differential.

Differentiability at (x_0, y_0) :

$$f \text{ is differentiable at } (x_0, y_0) \iff \exists a, b : \Delta f(h, k) = ah + bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2},$$

hvor $\lim_{\sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0} \varepsilon(h, k) = 0$. Bemærk, at

$$\begin{aligned} \Delta f(h, 0) &= ah + \varepsilon(h, 0)|h| \quad \wedge \quad \Delta f(0, k) = bk + \varepsilon(0, k)|k| \\ \Rightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(h, 0)}{h} &= a \quad \wedge \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0, k)}{k} = b. \end{aligned}$$

Disse grænseværdier kaldes henholdsvis den partielle afledede af f mht. x i (x_0, y_0) og den partielle afledede af f mht. y i (x_0, y_0) . Notation:

$$a = f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \wedge \quad b = f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

I de korte former $\partial f / \partial x$ og $\partial f / \partial y$ er punktet (x_0, y_0) underforstået. Det er ikke muligt i disse symboler at give en selvstændig tolkning af tælleren og nævneren, uden at dette fører til modstrid. Symbolet $\partial f / \partial x$, henholdsvis $\partial f / \partial y$, er altså ét samlet symbol.

Differentialet af f med udgangspunkt i (x_0, y_0) er en lineær funktion af tilvæksterne h og k . Som funktionsbetegnelse benyttes også her df :

$$df(h, k) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

Bemærk, at grafen for funktionen df i $(h, k, \Delta z)$ -koordinatsystemet er tangentplanen til f i $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Ser vi specielt på funktionen $g(x, y) = x$, får vi $dg(h, k) = 1h + 0k = h$. Vi skriver kort $dg(h, k) = dg = dx$, hvoraf $h = dx$. Ved at betragte $g(x, y) = y$ får vi analogt $k = dy$. Dermed har vi skrivemåden

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy,$$

eller

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

hvor (x_0, y_0) er underforstået.

3 Afledede funktioner

Hvis $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel i alle punkter i definitionsområdet eller i en delmængde af denne, definerer vi – når f er en funktion af én reel variabel – den afledede funktion $f'(x)$ eller – når f er en funktion af to reelle variable – de partielle afledede funktioner $f_x(x, y)$ og $f_y(x, y)$.

4 En sætning

For en forelagt funktion af to reelle variable kan det være besværligt at skulle benytte definitionen til at afgøre, om funktionen er differentiabel. Den følgende sætning kan imidlertid afklare spørgsmålet for stort set alle almindeligt forekommende funktioner.

Sætning. Hvis f_x og f_y eksisterer i en omegn af (x_0, y_0) , og f_x og f_y er kontinuerte i (x_0, y_0) , så er f differentiabel i (x_0, y_0) .

Bemærk, at sætningen kun angiver en tilstrækkelig betingelse for differentiability. Der findes (sære) funktioner, som ikke opfylder forudsætningerne, og som alligevel er differentiable.

Bevis. Der gælder, at

$$\begin{aligned}\Delta f(h, k) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ &= f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0).\end{aligned}$$

Vi har lagt $f(x_0 + h, y_0)$ til og trukket fra igen. På funktionen $f(x_0 + h, y_0)$, som kun afhænger af h , kan vi benytte Taylors formel med $n = 0$. Vi får

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0)h,$$

hvor ξ ligger mellem x_0 og $x_0 + h$. Ligeledes kan vi benytte Taylors formel med $n = 0$ på funktionen $f(x_0 + h, y_0 + k)$ med fastholdt h , hvorved

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) = f_y(x_0 + h, \eta)k,$$

hvor η ligger mellem y_0 og $y_0 + k$. Vi har nu

$$\Delta f(h, k) = f_x(\xi, y_0)h + f_y(x_0 + h, \eta)k.$$

Igen lægger vi til og trækker fra:

$$\begin{aligned}\Delta f(h, k) &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k \\ &\quad + (f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0))h + (f_y(x_0 + h, \eta) - f_y(x_0, y_0))k.\end{aligned}$$

Da f_x og f_y er kontinuerte i (x_0, y_0) , gælder

$$\begin{aligned}f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0) &\rightarrow 0 \text{ for } h \rightarrow 0, \\ f_y(x_0 + h, \eta) - f_y(x_0, y_0) &\rightarrow 0 \text{ for } \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Begge udtryk er altså epsilonfunktioner, dvs.

$$\begin{aligned}\Delta f(h, k) &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \varepsilon_1(h)h + \varepsilon_2(h, k)k \\ &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k \\ &\quad + \left(\varepsilon_1(h) \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \varepsilon_2(h, k) \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right) \sqrt{h^2 + k^2} \\ &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \varepsilon(h, k) \sqrt{h^2 + k^2},\end{aligned}$$

hvoraf ses, at f er differentiabel i (x_0, y_0) . □

5 Funktioner af n reelle variable

Både definitionen af differentiability og ovenstående sætning om differentiability kan umiddelbart generaliseres til at gælde for funktioner af n reelle variable.

3.9.2008/BR