Ekstremumsbestemmelse

1 Funktioner af én reel variabel

Lad f være en to gange differentiabel funktion med kontinuert anden afledede. Taylors grænseformel med $n = 2$:

$$\Delta f(h) = f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2),$$

hvor $o(h^2)/h^2 \to 0$ for $h \to 0$. Det approksimerende polynomium af højst anden grad fremstiller en parabel med ligningen

$$\Delta y = f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2.$$

I et punkt med vandret tangent er $f'(x_0) = 0$, og ligningen forenkles til

$$\Delta y = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2.$$

Det er nu klart, at

$$\begin{aligned} f''(x_0) > 0 \quad &\Rightarrow \quad f \text{ har lokalt minimum,} \\ f''(x_0) < 0 \quad &\Rightarrow \quad f \text{ har lokalt maksimum.} \end{aligned}$$

Når $f''(x_0) = 0$, må der yderligere undersøgelse til for at afgøre, om der er lokalt ekstemum i punktet. Bestemmelse af værdien af den anden afledede i et punkt med vandret tangent udgør åbenbart et alternativ til den sædvanlige fortegnsundersøgelse af $f'(x)$.

2 Funktioner af to reelle variable

Lad f være en to gange differentiabel funktion med kontinuerte partielle afledede. Taylors grænseformel for funktioner af to reelle variable med $n = 2$:

$$\begin{aligned} \Delta f(h,k) = {} & f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k \\ & + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2\right) + o(h^2+k^2), \end{aligned}$$

hvor $o(h^2+k^2)/(h^2+k^2) \to 0$ for $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$. Ligningen for den oskulerende paraboloide i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er derfor

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2\right).$$

I et kritisk punkt med vandret tangentplan er $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$, og ligningen bliver

$$\Delta z = \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2\right).$$

Vi indfører de forkortede betegnelser

$$A = f_{xx}(x_0,y_0), \qquad B = f_{xy}(x_0,y_0), \qquad C = f_{yy}(x_0,y_0),$$

hvorefter

$$\Delta z = \frac{1}{2}\left(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\right).$$

For $A \neq 0$ og med benyttelse af hjælpestørrelsen $D = AC - B^2$ kan Δz omformes til

$$\Delta z = \frac{1}{2}A\left(\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{D}{A^2}k^2\right).$$

Hvis $A = 0$, men $C \neq 0$, sættes C uden for parentes i stedet for A. Hvis $A = C = 0$, se nedenfor. En forenkling fås ved at indføre koordinatskiftet

$$h_1 = h + \frac{B}{A}k, \qquad k_1 = \frac{\sqrt{|D|}}{|A|}k,$$

og ved hjælp af fortegnsfunktionen sgn (læses signum), der defineres ved

$$\mathrm{sgn} D = \begin{cases} 1 & \text{for } D > 0 \\ -1 & \text{for } D < 0 \end{cases},$$

kan vi skille D i fortegn og numerisk værdi, dvs. $D = \mathrm{sgn} D\,|D|$. Samlet får vi

$$\Delta z = \frac{1}{2}A\left(h_1^2 + \mathrm{sgn} D\, k_1^2\right).$$

Bemærk, at en nødvendig betingelse for $D > 0$ er, at A og C har samme fortegn. Det kan nu aflæses, at

$$\begin{aligned} D > 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{den oskulerende paraboloide er elliptisk,} \\ D < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{den oskulerende paraboloide er hyperbolsk.} \end{aligned}$$

Når paraboloiden er elliptisk, afgøres konveksiteten af A's (eller C's) fortegn. Konveks, dvs. åben opad, når $A > 0$, konkav, dvs. åben nedad, når $A < 0$.

Når $A = C = 0$ og $B \neq 0$, bliver $\Delta z = Bhk$, som fremstiller en hyperbolsk paraboloide. Udregning giver $D = -B^2 < 0$, dvs. tilfældet falder med ind under reglen om D's fortegn formuleret ovenover.

Når $A \neq 0$ og $B = C = 0$, bliver $\Delta z = \frac{1}{2}Ah^2$, som fremstiller en parabolsk cylinderflade. Analogt når $A = B = 0$ og $C \neq 0$. I begge tilfælde er $D = 0$.

Endelig når $A = B = C = 0$, bliver $\Delta z = 0$, og den oskulerende paraboloide udarter til en plan. Også her er $D = 0$.

Vi kan nu opsummere:

$D > 0$: Elliptisk punkt, $A > 0$: f har lokalt minimum.
$A < 0$: f har lokalt maksimum.

$D < 0$: Hyperbolsk punkt, f har sadelpunkt.

$D = 0$: Parabolsk punkt eller planpunkt, yderligere undersøgelse nødvendig for at afgøre, om der er lokalt ekstremum i punktet.

Bemærk, at når $D = 0$, kan det forekomme, at f hverken har lokalt ekstremum eller sadelpunkt.

3.9.2008/BR