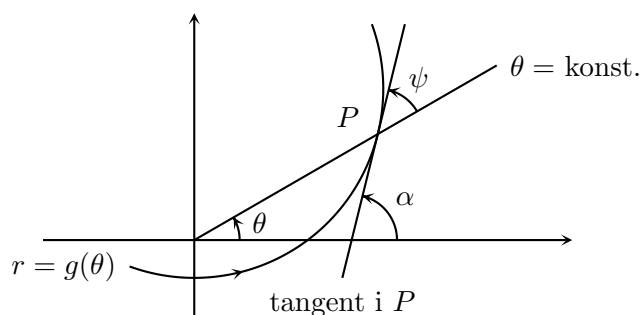


Tangenter til polære kurver

1 Formlen $\cot \psi = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}$

Betragt en kurve i polære koordinater givet ved $r = g(\theta)$.



Kurven skæres af linien $\theta = \text{konst.}$ i punktet P . Vinklen fra $\theta = \text{konst.}$ til kurvens tangent i P kaldes ψ .

Benyttes θ som parameter, har vi umiddelbart en parameterfremstilling for kurven, idet

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\theta) &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}, & r &= g(\theta) \\ &= g(\theta)(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \\ &= g(\theta)\mathbf{e}(\theta).\end{aligned}$$

Kurvens tangent har retningsvektor

$$\mathbf{r}'(\theta) = g'(\theta)\mathbf{e}(\theta) + g(\theta)\mathbf{e}'(\theta),$$

jf. Kompendium i calculus side 18 linie 5. Bemærk, at

$$\mathbf{e}'(\theta) = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} = \widehat{\mathbf{e}}(\theta),$$

dvs.

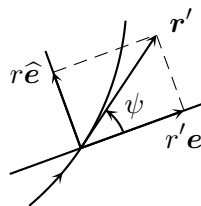
$$\mathbf{r}'(\theta) = g'(\theta)\mathbf{e}(\theta) + g(\theta)\widehat{\mathbf{e}}(\theta),$$

som kort kan skrives

$$\mathbf{r}' = r' \mathbf{e} + r \hat{\mathbf{e}}.$$

For ψ gælder derfor

$$\tan \psi = \frac{r}{r'},$$



eller – som formelen oftest angives –

$$\cot \psi = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}.$$

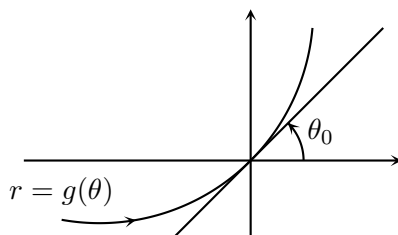
2 Hældningskoefficient

Kurvetangentens hældningskoefficient $\tan \alpha$ kan også bestemmes. Bemærk, at $\alpha = \theta + \psi$, hvorefter

$$\begin{aligned} \tan \alpha = \tan(\theta + \psi) &= \frac{\tan \theta + \tan \psi}{1 - \tan \theta \tan \psi} \\ &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{r}{r'}}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{r}{r'}} = \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta}. \end{aligned}$$

3 Kurvetangent i koordinatsystemets pol

Betragt igen en kurve givet ved $r = g(\theta)$. Antag, at $g(\theta_0) = 0$.



Hvis g er en differentiabel funktion, g' er kontinuert, og $g'(\theta_0) \neq 0$, så er kurven differentiabel i $\theta = \theta_0$, og linien

$$\theta = \begin{cases} \theta_0 \\ \theta_0 + \pi \end{cases}$$

er tangent til kurven i polen.

18.9.2008/BR