Trigonometriske formler

I Kompendium i calculus side 2 er der opført en række trigonometriske formler, som er meget anvendelige i forbindelse med omskrivninger af diverse udtryk. Her følger en udledning af formlerne plus lidt mere.

1 Grundrelationen mellem sin og cos

Punktet på enhedscirklen svarende til vinkeldrejningen x har koordinaterne $\cos x$ og $\sin x$. Ved indsættelse i cirklens ligning får vi

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

2 Grundrelationen mellem tan og cot

Det fremgår umiddelbart af definitionen på tan og cot, at

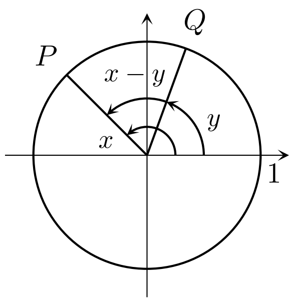
$$\tan x \cot x = 1.$$

3 Additionsformlerne

Lad $P = (\cos x, \sin x)$ og $Q = (\cos y, \sin y)$. Dermed er

$$\cos(x - y) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ},$$

da $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = 1$.



Vi har derfor, at

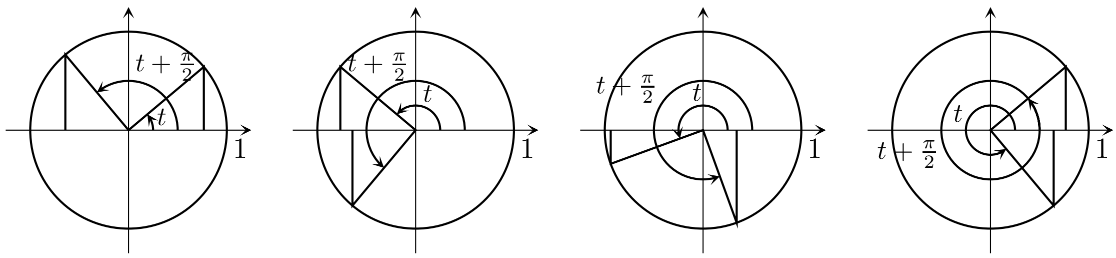
$$\begin{aligned}\cos(x-y) &= (\cos x\boldsymbol{i} + \sin x\boldsymbol{j})\cdot(\cos y\boldsymbol{i} + \sin y\boldsymbol{j})\\ &= \cos x\cos y + \sin x \sin y. \end{aligned} \tag{1}$$

Sættes $y := -y$ i (1), får vi [1]

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y, \tag{2}$$

da cos er en lige funktion, og sin er en ulige funktion.
Bemærk, at uanset placering i kvadrant gælder

$$\cos\Big(t+\frac{\pi}{2}\Big) = -\sin t \quad \text{og} \quad \sin\Big(t+\frac{\pi}{2}\Big) = \cos t.$$



Vi sætter nu $y := y + \frac{\pi}{2}$ i (2), og får

$$\begin{aligned} \cos\Big(x+y+\frac{\pi}{2}\Big) &= \cos x\cos\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big) - \sin x\sin\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big)\\ &\Downarrow\\ -\sin(x+y) &= \cos x(-\sin y) - \sin x\cos y\\ &\Downarrow\\ \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y. \end{aligned} \tag{3}$$

I (3) sættes $y := -y$, og vi får

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y. \tag{4}$$

Traditionelt angives alle formlerne (1) - (4), selvom (2) og (3) er tilstrækkelige, når vi ved, at cos er lige og sin er ulige.
Sammenfattende kan vi skrive

$$\begin{aligned}\cos(x\pm y) &= \cos x\cos y \mp \sin x\sin y,\\ \sin(x\pm y) &= \sin x\cos y \pm \cos x\sin y.\end{aligned}$$

Ved division og efterfølgende forkortning med $\cos x\cos y$ får vi

$$\tan(x\pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1\mp \tan x\tan y}.$$

[1] Symbolet := (kolon lig med) kaldes det dynamiske lighedstegn. Det angiver, at venstresiden skal *erstattes* med højresiden.

4 Komplementvinkel og supplementvinkel

Additionsformlerne (1) og (4) anvendt på $\frac{\pi}{2} - x$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin x \sin\frac{\pi}{2} = 0\cos x + 1\sin x = \sin x,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x = 1\cos x - 0\sin x = \cos x.$$

Ved division får vi

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

For komplementvinklen $\frac{\pi}{2} - x$ til x har vi sammenfattende:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x.$$

Additionsformlerne (1) og (4) anvendt på $\pi - x$:

$$\cos(\pi - x) = \cos\pi\cos x + \sin\pi\sin x = -1\cos x + 0\sin x = -\cos x,$$
$$\sin(\pi - x) = \sin\pi\cos x - \cos\pi\sin x = 0\cos x - (-1)\sin x = \sin x.$$

Ved division får vi

$$\tan(\pi - x) = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\tan x.$$

For supplementvinklen $\pi - x$ til x har vi sammenfattende:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x,$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \qquad \cot(\pi - x) = -\cot x.$$

5 Formler for cos, sin og tan til den dobbelte vinkel

Ved at sætte $y := x$ i additionsformlerne (2) og (3) får vi

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

Ved division og efterfølgende forkortning med $\cos^2 x$, får vi

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Udtrykket for $\cos 2x$ kan omskrives ved benyttelse af grundrelationen mellem cos og sin, så der fremkommer yderligere to formler:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

6 Formler for cos og sin udtrykt ved den dobbelte vinkel

$$\cos 2x = \begin{cases} 2\cos^2 x - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}, \\ 1 - 2\sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \pm\sqrt{\dfrac{1-\sin 2x}{2}}. \end{cases}$$

7 Formler for tan udtrykt ved cos og sin til den dobbelte vinkel

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}, \\ \dfrac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = \dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}. \end{cases}$$

Formlerne skrives ofte med $x := \frac{x}{2}$ som

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

8 Formler for cos og sin udtrykt ved tan til den halve vinkel

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

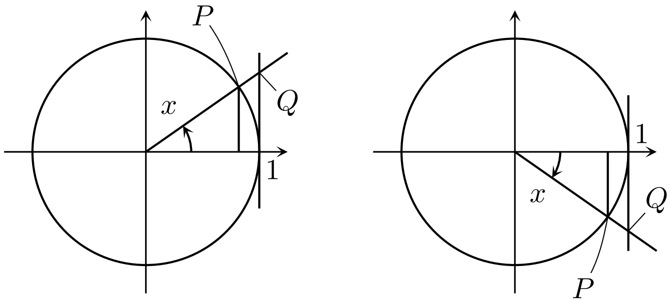
$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.$$

9 Formler for $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

Jf. $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$, se Kompendium i calculus side 9:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{x}{2}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan\frac{x}{2} + 1}{1 - \tan\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1-\sin x)} \\ &= \frac{\cos x}{1-\sin x}. \end{aligned}$$

10 En ulighed: $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$



$P = (\cos x, \sin x)$

$Q = (1, \tan x)$

Bemærk, at i intervallet $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ gælder [2]

$$|\sin x| < |x| < |\tan x|.$$

Heraf fås

$$|\sin x| < |x| \iff \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1 \iff \frac{\sin x}{x} < 1$$

og

$$|x| < |\tan x| \iff |\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| \iff \cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

Samlet gælder, at

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Det ses, at

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

da $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

4.9.2008/BR

[2] Vinkler målt i radian er identiske med de tilsvarende buelængder på enhedscirklen.